Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 883541 31 agosto 2022

1. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \cos x - \sin x}{x^2}$

► (a) è limitata inferiormente e ha massimo

(b) ha minimo ma non ha massimo

(c) non è limitata

(d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \cos x - \sin x}{x^2}$$

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x}\,(1+o(1))}{x^2} \longrightarrow 0$

per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{(1+3x)^{1/3} - \cos x - \sin x}{x^2} =$

$$= \frac{1 + \frac{1}{3}3x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}(3x)^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x + o(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - x^2 \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} \cancel{-x} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

Sulla semiretta $(0,+\infty)$ esiste almeno un punto dove $f(x) \geq 0$ dato che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+3x} - \cos x - \sin x = +\infty$ quindi f ha max per il teorema di Weierstrass generalizzato. Lo stesso teorema garantisce che f è limitata sia in $(-\infty,0)$ che in $(0,+\infty)$.

2. L'insieme $A = \{x^2 \sin(x^2) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

(a) è limitato

(b) è limitato inferiormente ma non superiormente

(c) è limitato superiormente ma non inferiormente

► (d) non è limitato né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$$A = \{ x^2 \sin(x^2) : x \in \mathbb{R}, x > 0 \}.$$

Consideriamo la successione

$a_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Risulta che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

e $\lim_{n\to\infty} a_n^2 \sin(a_n^2) = \lim_{n\to\infty} (2\pi n + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = +\infty$

quindi $\sup(A) = +\infty$.

Analogamente, scegliendo $b_n = \sqrt{2\pi n + \frac{3}{2}\pi}$ risulta

$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $b_n^2 \sin(b_n^2) = (2\pi n + \frac{3}{2}\pi) \cdot (-1) \longrightarrow -\infty$

quindi $\inf(A) = -\infty$. Ne segue che

A non è limitato né inferiormente né superiormente.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1} t(t-1)^3 e^{\arctan t}\, dt$

(a) non ha né massimi né minimi locali

(b) ha un solo punto di minimo locale e un solo punto di massimo locale

(c) ha un solo punto di minimo locale e nessun massimo locale

► (d) ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale

Soluzione:

$$F(x)=\int_{x^2}^{1} t(t-1)^3 e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$$

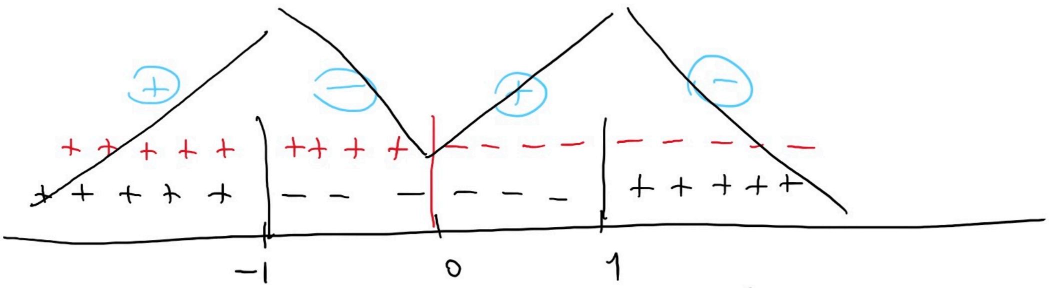
F è derivabile e $F'(x)=-2x\cdot x^2\,(x^2-1)^3\,e^{\operatorname{arctg}(x^2)}$

studiamo il segno di F':

$(x^2-1)^3\geq 0 \iff x^2-1\geq 0 \iff x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$x^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}, \qquad e^{\operatorname{arctg}(x^2)}\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$-x\geq 0 \iff x\leq 0$



F ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale.

4. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}$ (b) $-\frac{3}{4}e^{-2}$ (c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2}$ ▶ (d) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2}$

Soluzione:

$\int xe^{-2x}\,dx$ per parti, integrando e^{-2x} e derivando x

$$= x\left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x} - \int 1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xe^{-2x}\,dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}.$$

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\sin \frac{1}{x})\, e^{\cos \frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge negativamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}\; e^{\cos \frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$$

La funzione integranda è a segno variabile.
Proviamo la convergenza assoluta.

$$\left| \sin \frac{1}{x}\; e^{\cos \frac{1}{x}} \right| \le 1 \cdot e^1 = e$$

quindi $\displaystyle \left| \frac{\sin \frac{1}{x}\; e^{\cos \frac{1}{x}}}{x^2} \right| \le \frac{e}{x^2}$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e}{x^2}\, dx$ converge, per il criterio del confronto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}\; e^{\cos \frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$ converge assolutamente.

6. La funzione $F : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t}\, dt$

(a) non è limitata né inferiormente né superiormente

► (b) è limitata sia superiormente che inferiormente

(c) è limitata superiormente ma non inferiormente

(d) è limitata inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

$F : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_0^{1/x} e^{-t}\, dt$

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ che è convergente

F è inoltre continua $\Rightarrow \lim_{x\to 1} F(x) = F(1) = \int_0^1 e^{-t}\, dt \in \mathbb{R}$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato, F è limitata.

7. La successione $a_n = \log(n + (-1)^n) + (-1)^n \log n$, definita per $n \geq 2$

► (a) ha minimo ma non è limitata

(b) ha sia massimo che minimo

(c) non ha limite ma è limitata

(d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$a_n = \log(n + (-1)^n) + (-1)^n \log n \qquad n \geq 2.$$

consideriamo gli indici pari

$a_{2n} = \log(2n+1) + \log(2n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty$

quindi la successione non è limitata superiormente.

Vediamo ora i dispari

$a_{2n+1} = \log(2n\cancel{+1}\cancel{-1}) - \log(2n+1) = \log\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \to \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$

Le due sottosuccessioni estratte sono entrambe limitate inferiormente, quindi (a_n) è limitata inferiormente.

Inoltre (a_{2n}) ha sicuramente minimo (poiché $a_{2n} \to +\infty$).

Osserviamo che $\frac{2n}{2n+1} < 1 \ \forall n$, quindi $a_{2n+1} < 0 \ \forall n$.

Ne segue che anche (a_{2n+1}) ha minimo, quindi tutta la successione ha minimo.

8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^5-(n+1)^5}{n^4} =$$

(a) $+\infty$ (b) $\frac{5}{4}$ ► (c) 5 (d) 0

Soluzione:

$$(n+2)^5-(n+1)^5 = n^5\left(1+\frac{2}{n}\right)^5 - n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \qquad \left((1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t) \text{ se } t\to 0\right)$$

$$= n^5\left(1+5\cdot\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^5\left(1+5\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \cancel{n^5}+10n^4-\cancel{n^5}-5n^4+o(n^4) = 5n^4+o(n^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^5-(n+1)^5}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+o(n^4)}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(5+o(1))}{n^4} = 5.$$

9. La serie $\sum_n \frac{1}{(2-(-1)^n)^n}$

(a) diverge negativamente

(b) converge ma non converge assolutamente

► (c) diverge positivamente

(d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{1}{(2-(-1)^n)^n} \qquad \text{Poniamo } a_n = \frac{1}{(2-(-1)^n)^n}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{(2-1)^{2n}} = 1 \qquad \text{(indici pari)}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{(2+1)^{2n+1}} = \frac{1}{3^{2n+1}} \qquad \text{(indici dispari)}$$

$a_{2n}\to 1$, $a_{2n+1}\to 0$, quindi (a_n) non ha limite.

Viene quindi a mancare la condizione necessaria per la convergenza.

Osserviamo ora che $a_n \geq 0$ $\forall n$, quindi $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

10. La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{2\log n}}$

(a) diverge positivamente

► (b) converge assolutamente

(c) diverge negativamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{2\log n}}$$

la serie è a termini positivi. Osserviamo che

$$(\log n)^{2\log n} = e^{2\log n(\log\log n)} \geq e^{2\log n} \quad \text{definitivamente.}$$

quindi

$$\frac{1}{(\log n)^{2\log n}} \leq \frac{1}{e^{2\log n}} = \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto, la serie data converge e converge anche assolutamente poiché è a termini positivi.

11. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{x+y}(y^2 - xy)$ sono

(a) uno

► (b) due

(c) infiniti

(d) nessuno

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x+y}(y^2 - xy)$$

$$f_x = e^{x+y}(y^2 - xy) + e^{x+y}(-y) = e^{x+y}(y^2 - xy - y) = e^{x+y}\, y\,(y - x - 1)$$

$$f_y = e^{x+y}(y^2 - xy) + e^{x+y}(2y - x) = e^{x+y}(y^2 - xy + 2y - x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \cancel{e^{x+y}}\, y(y - x - 1) = 0 \\ \cancel{e^{x+y}}(y^2 - xy + 2y - x) = 0 \end{cases}$$

dalla prima equazione abbiamo $y = 0$ oppure $y - x - 1 = 0$

se $y = 0$, dalla seconda otteniamo $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

quindi il punto stazionario $(0,0)$.

Se $y - x - 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1$ e dalla seconda

$$y^2 - (y-1)y + 2y - (y-1) = 0 \iff \cancel{y^2} \cancel{- y^2} \cancel{+ y} + 2y \cancel{- y} + 1 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}$$

quindi $x = y - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ e il punto stazionario è $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La funzione ha 2 punti stazionari.

12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1$

(a) non ha né massimo né minimo

► (b) ha minimo ma non ha massimo

(c) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1.$

Dato che $x^6 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $e^{|y-3|} \geq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

risulta che $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Osservando che $f(0,3) = 0^6 + e^{|3-3|} - 1 = 0$

otteniamo che f ha minimo.

Consideriamo ora la restrizione all'asse x

$f(x,0) = x^6 + e^3 - 1$.

Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$

quindi f non ha massimo.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 31 agosto 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \log|x+1|$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Determinare inoltre il numero degli zeri della funzione. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione non è definita per $x = -1$, il suo dominio quindi è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Si può esplicitare il valore assoluto nella funzione ottenendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \log(x+1) & \text{per } x > -1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \log(-x-1) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

Abbiamo che $f(0) = 0$. Poiché $\log(-x-1) > 0$ per $x < -2$ e tende a $-\infty$ per $x \to -1^-$, si può concludere che la funzione $f(x)$ ha almeno un altro zero per $x \in (-2, -1)$. La funzione inoltre è sicuramente positiva per $x > 0$ e per $x < -2$. Valgono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty.$$

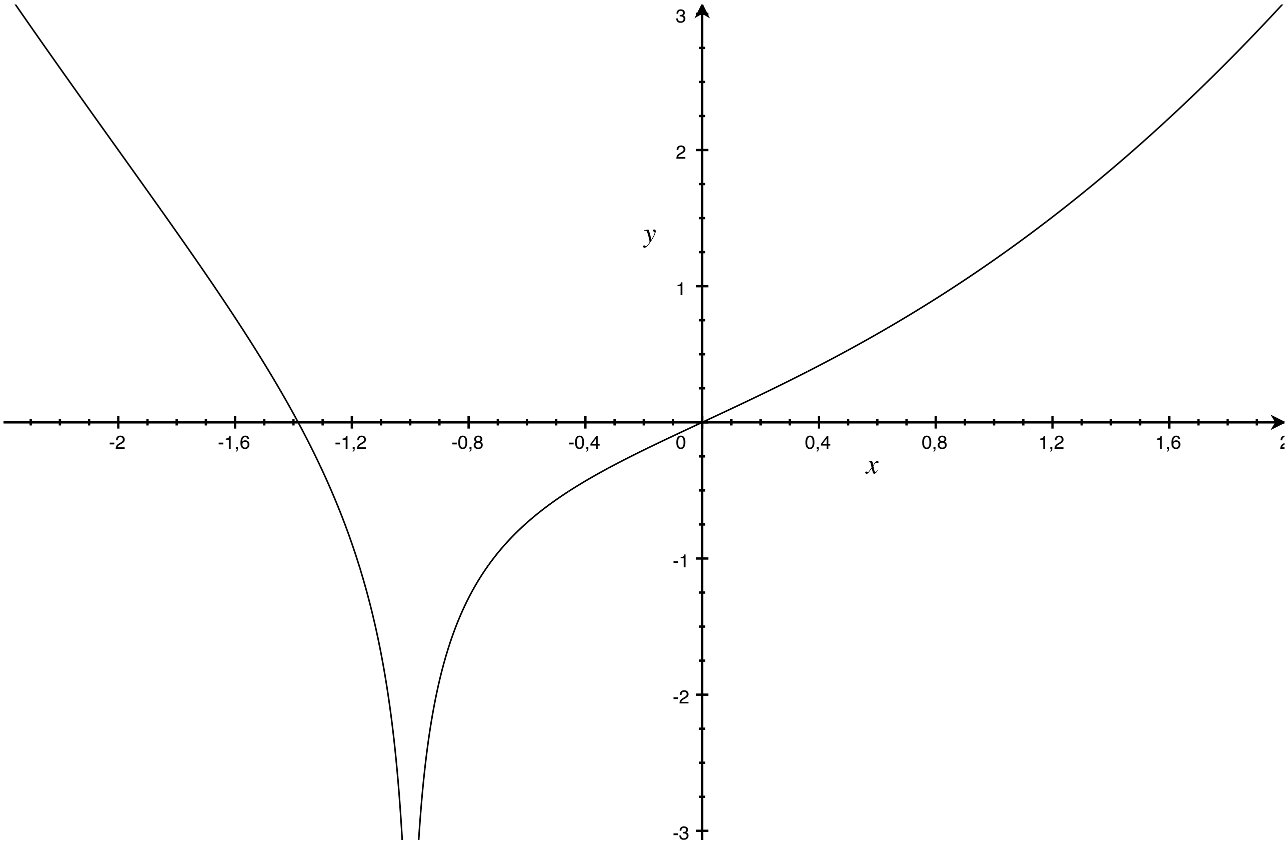
La derivata della funzione è

$$f'(x) = x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Per studiare il segno della derivata prima osserviamo che il numeratore è sempre positivo, quindi il segno dipende solo dal denominatore. La derivata risulta sempre positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$. Possiamo concludere allora che la funzione ha solo i due zeri trovati precedentemente. La derivata seconda vale

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

ed è positiva per $x < -2$ e per $x > 0$, negativa per $-2 < x < -1$ e per $-1 < x < 0$. La funzione presenta due flessi in $x = -2$ e in $x = 0$.



Esercizio 2 Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\, dx.$$

Soluzione

La funzione integranda è continua in $(1, +\infty)$ e non limitata in un intorno di 1. Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 2$. Osserviamo che

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)\right| \leq 1$$

quindi

$$\int_1^2 \left|\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)\right|\, dx$$

converge assolutamente, quindi converge. Invece, per ogni $\varepsilon > 0$, utilizzando la sostituzione $x = 1 + t$, risulta

$$\int_{1+\varepsilon}^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_\varepsilon^1 -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt$$

quindi

$$\int_1^2 -\frac{1}{\log x}\, dx = \int_0^1 -\frac{1}{\log(1+t)}\, dt$$

Dato che

$$\log(1+t) = t + o(t), \qquad t \to 0$$

si ha che

$$\lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{\log(1+t)}}{-\frac{1}{t}} = 1.$$

Poiché

$$\int_0^1 -\frac{1}{t}\,dt = -\infty$$

per il criterio del confronto asintotico otteniamo che

$$\int_1^2 -\frac{1}{\log x}\,dx = -\infty$$

quindi

$$\int_1^2 \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\,dx = -\infty.$$

Per $x \to +\infty$, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $\sin t$ con $t = \frac{1}{\log x}$, risulta che

$$\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{6\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)$$

quindi

$$\sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x} = -\frac{1}{6\log^3 x} + o\left(\frac{1}{\log^4 x}\right).$$

Dato che

$$\int_2^{+\infty} -\frac{1}{6\log^3 x}\,dx = -\infty,$$

per il criterio del confronto asintotico abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\,dx = -\infty.$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\log x}\right) - \frac{1}{\log x}\,dx$$

diverge negativamente.

Esercizio 3 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\alpha n}}{n!}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Utilizziamo il criterio del rapporto ponendo

$$a_n = \frac{n^{\alpha n}}{n!}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{\alpha n}}(n+1)^{\alpha-1}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{\alpha n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha = e^\alpha$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ e & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dal criterio del rapporto otteniamo quindi che la serie converge se $\alpha < 1$ e diverge positivamente se $\alpha \geq 1$.