Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	vecchio regolamento 13 luglio 2022

1. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{(x^2)}+1\right)$

(a) ha un asintoto verticale e nessun altro tipo di asintoto

(b) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

(c) non ha nessun tipo di asintoto

► (d) ha un asintoto obliquo e nessun altro tipo di asintoto

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}\log(e^{x^2}+1)$$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua, quindi non ha asintoti verticali. Cerchiamo un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^4+1)}\log\left[e^{x^2}\left(1+e^{-x^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^5(1+o(1))}\left[x^2+\log\left(1+e^{-x^2}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^5(1+o(1))}\cdot\left(1+o(1)\right) = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{x^2}+1\right)-x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[\log(e^{x^2})+\log(1+e^{-x^2})\right]-x(x^4+1)}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[x^2+e^{-x^2}+o(e^{-x^2})\right]-x^5-x}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{-x^2}-x+o(x^3e^{-x^2})}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}-x^{-2}+o(e^{-x^2})}{x+x^{-1}} = \frac{0}{+\infty} = 0 = q.$$

f ha quindi l'asintoto obliquo di equazione $y=x$ per $x\to+\infty$. Dato che f è dispari, ha anche lo stesso asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

La presenza di asintoti orizzontali è incompatibile con quella degli asintoti obliqui.

2. Sia $A = \left\{x\in\mathbb{R}:\ \sqrt{x^2+2} < 3-x\right\}$. Allora l'estremo inferiore di A è:

(a) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{7}{6}$ (c) 0 ► (d) $-\infty$

3. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\sqrt{|x|}$

(a) ha un flesso per $x = 0$ (b) è convessa in $\mathbb{R}$

► (c) non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$ (d) è concava in un intorno di 0

4. Se $F(x) = \int_{\log x}^{e^2} \frac{t^2}{e^t + e^{3t}}\, dt$ allora $F'(e^2) =$

(a) $\frac{e^4}{e^{(e^2)} + e^{(3e^2)}}$ (b) 0 (c) $\frac{4}{e^2+e^6}$ ► (d) $\frac{-4}{e^8+e^4}$

Soluzione:

$$F(x) = \int_{\log x}^{e^2} \frac{t^2}{e^t + e^{3t}}\, dt$$

$$F'(x) = -\frac{\log^2 x}{e^{\log x} + e^{3\log x}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log^2 x}{x + x^3} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log^2 x}{x^2 + x^4}$$

$$F'(e^2) = -\frac{\log^2(e^2)}{e^4 + e^8} = \frac{-4}{e^4 + e^8}$$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{n\pi}^{(n+2)\pi} (\sin x)^2 (\cos x)^2\, dx =$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $+\infty$ (c) non esiste ► (d) 0

6. $\int_1^2 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\, dx =$

(a) 0 (b) $\log \frac{3}{2}$ ► (c) $\log\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$ (d) $\log(e^2 - e)$

7. $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right)(n^3 - e)$

(a) vale 0 (b) vale $+\infty$

(c) vale $-\infty$ ► (d) è un numero reale diverso da 0

Soluzione:

$$a_n = \left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(n^3 - e\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) n^3\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) n^3\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cancel{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}}\right) n^3\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1 + o(1)\right) n^3\left(1 + o(1)\right) = 1 + o(1)$$

quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

8. Sia $A = \left\{\dfrac{\sin(n+1)}{e^n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\right\}$. Allora

(a) A non è limitato superiormente

► (b) $\inf(A) < 0$

(c) $\inf(A) = 0$

(d) $\sup(A) > 1$

9. La successione $a_n = \log\sqrt{n} - 2n$, $n \geq 1$

(a) non ha limite

(b) è decrescente e $\inf_n a_n = \log 5 - 10$

► (c) è decrescente e $\inf_n a_n = -\infty$

(d) è crescente e $\sup_n a_n = +\infty$

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3xy - 2x^3 \\ y(0) = \dfrac{35}{9}, \end{cases}$ allora $y(\sqrt{2}) =$

(a) $\dfrac{32}{9} + 3e^3$ (b) $\dfrac{12\sqrt{2}+8}{9}e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}} + 3$ ► (c) $\dfrac{16}{9} + \dfrac{31e^3}{9}$ (d) $\dfrac{32}{9}$

11. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\dfrac{x^3}{y^3} \\ y(1) = 4. \end{cases}$ Allora $y(4) =$

(a) $\dfrac{17}{4}$ (b) $\sqrt[4]{17}$ ► (c) 1 (d) -2

12. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 8y' + 17y = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4e^{-\pi} \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2e^{-\pi}. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

(a) non esiste (b) $+\infty$ (c) $\dfrac{\pi}{2}$ ► (d) 0

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica (vecchio regolamento)

Pisa, 13 luglio 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3|$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo e del termine al denominatore, dobbiamo imporre $|x-3| \neq 0$ quindi si ha che l'insieme di definizione di f è dato da $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Osserviamo che la funzione è tale che $f(x+3) = f(-x+3)$, questo implica che il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 3$. Inoltre possiamo calcolare il limite per $x \to 3$ con la sostituzione $t = |x-3|$ come segue

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3| = \lim_{t\to 0^+} \frac{2 + 5\sqrt{t}\log t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

La retta $x = 3$ risulta essere un asintoto verticale per f. Calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Escludiamo la presenza di asintoti obliqui poichè $f(x) \sim 5\log|x-3|$ per $x \to \pm\infty$. La funzione è derivabile nel suo insieme di definizione in quanto composizione di funzioni derivabili. Ne calcoliamo la derivata prima ed otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right) & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

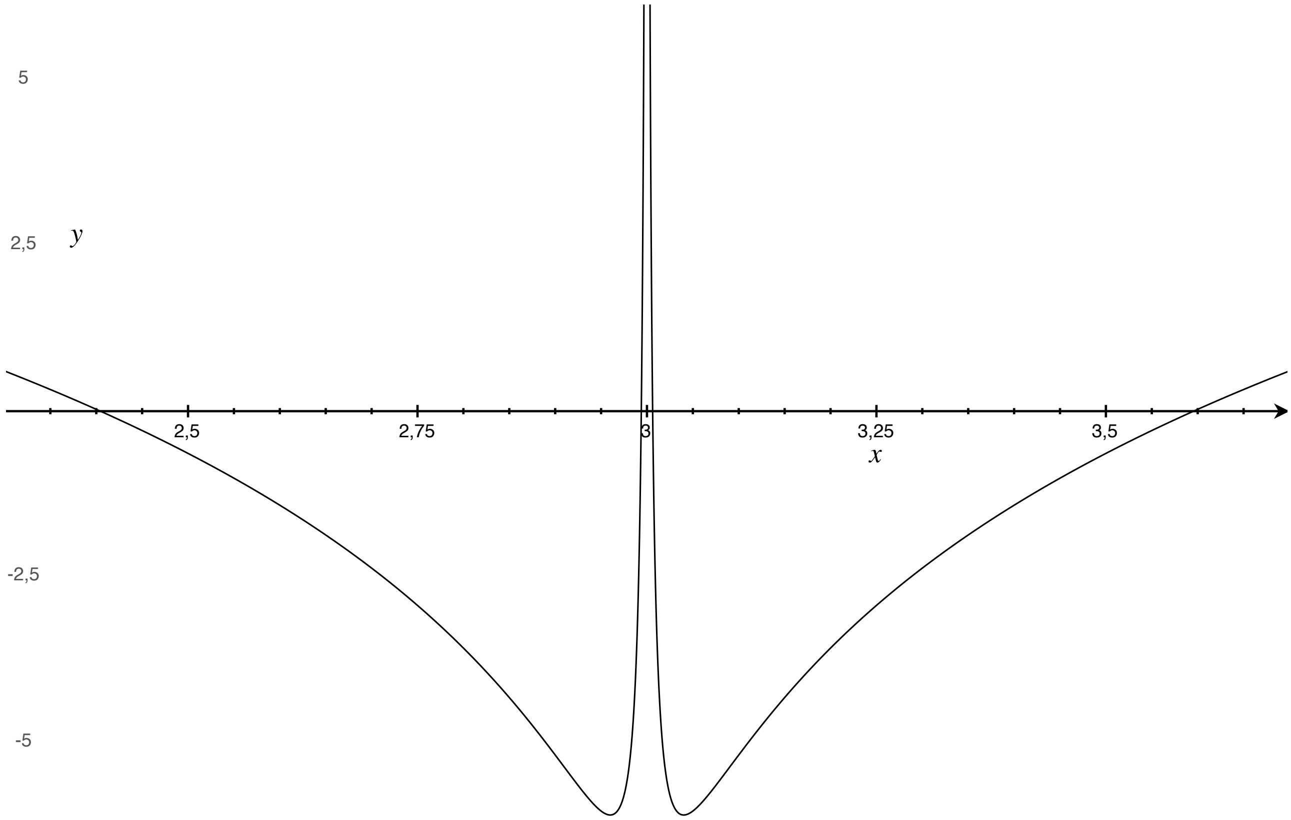
Si ha che $f'(x) = 0$ in $x = \frac{74}{25}$ e in $x = \frac{76}{25}$ con $f'(x) > 0$ per $\frac{74}{25} < x < 3$ e per $x > \frac{76}{25}$. Ne deduciamo che i punti $x = \frac{74}{25}$ e $x = \frac{76}{25}$ sono di minimo assoluto per f, f è crescente in $\left[\frac{74}{25}, 3\right)$ e in $\left[\frac{76}{25}, +\infty\right)$, mentre f è decrescente in $\left(-\infty, \frac{74}{25}\right]$ e in $\left(3, \frac{76}{25}\right]$. Inoltre vale $f\left(\frac{74}{25}\right) = f\left(\frac{76}{25}\right) = 10(1 - \log 5) < 0$. Poichè $f(0) > 0$, il teorema degli zeri ci garantisce che f ammette quattro zeri x_1, x_2, x_3, x_4 con

$$0 < x_1 < \frac{74}{25} < x_2 < 3 < x_3 < \frac{76}{25} < x_4.$$

Sfruttiamo ora la simmetria rispetto alla retta $x = 3$ e calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 3$. Abbiamo per $x < 3$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{(3-x)^{5/2}} - \frac{5}{(x-3)^2}$$

che si annulla per $x = \frac{291}{100}$ ed è strettamente positiva per $\frac{291}{100} < x < 3$, intervallo ove la funzione risulta quindi strettamente convessa. La funzione risulta invece concava per $-\infty < x < \frac{291}{100}$. Il punto $x = \frac{291}{100}$ è di flesso. Per simmetria concludiamo nel caso $x > 3$.



Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Soluzione

Visto che $e^{(x^2)} - 1 \neq 0$ per $x > 0$, l'unico punto problematico per la continuità è $x = 0$. Ovviamente si ha $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$, quindi basta preoccuparsi del $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Usando gli sviluppi di Taylor vediamo che

$$\frac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} = \frac{(\alpha - 1)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

da cui segue che il limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ è 0 se e solo se $\alpha = 1$. Dunque la $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 1$, e per $\alpha \neq 1$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma discontinua in 0.

Per quanto riguarda la derivabilità, la $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per qualsiasi α, con derivata $f'(x) = 0$ se $x < 0$ e

$$f'(x) = \frac{(2\alpha x \cos(\alpha x^2) - 2 \sin x \cos x)(e^{(x^2)} - 1) - (\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2)(2xe^{(x^2)})}{(e^{(x^2)} - 1)^2}$$

se $x > 0$.

Rimane da preoccuparsi di $x = 0$, e visto che derivabile implica continua, l'unica possibilità è che $\alpha = 1$. Chiaramente $f'_-(0) = 0$, quindi dobbiamo vedere se $f'_+(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} = 0$ oppure no.

Per $h \to 0^+$, sviluppando il numeratore a ordine 3 abbiamo

$$\frac{f(h) - 0}{h} = \frac{\sin(h^2) - (\sin h)^2}{h(e^{(h^2)} - 1)} = \frac{h^2 + o(h^3) - (h^2 + o(h^3))}{h^3 + o(h^3)} = \frac{o(h^3)}{h^3 + o(h^3)} \to 0$$

e quindi la $f(x)$ per $\alpha = 1$ è effettivamente derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare, del secondo ordine, non omogenea. Cominciamo col trovare una soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

ha la radice $\lambda = -2$ con molteplicità 2. L'integrale generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Dato che -2 è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 2, se $\alpha = -2$, cercheremo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = Ax^2 e^{-2x}.$$

Derivando otteniamo

$$\bar{y}'(x) = A\left(2xe^{-2x} + x^2(-2)e^{-2x}\right) = 2Ae^{-2x}(x - x^2),$$

$$\bar{y}''(x) = 2A\left(-2e^{-2x}(x - x^2) + e^{-2x}(1 - 2x)\right) = 2Ae^{-2x}(-2x + 2x^2 + 1 - 2x) = 2Ae^{-2x}(2x^2 - 4x + 1).$$

Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$2Ae^{-2x}(2x^2 - 4x + 1) + 4 \cdot 2Ae^{-2x}(x - x^2) + 4Ax^2 e^{-2x} = e^{-2x}.$$

Quindi

$$2Ae^{-2x}(2x^2 - 4x + 1 + 4x - 4x^2 + 2x^2) = e^{-2x} \iff 2A = 1 \iff A = \frac{1}{2}.$$

Quindi otteniamo

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se invece $\alpha \neq -2$, α non è radice del polinomio caratteristico e cercheremo una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = Be^{\alpha x}.$$

Derivando otteniamo

$$\bar{y}'(x) = B\alpha e^{\alpha x}$$

$$\bar{y}''(x) = B\alpha^2 e^{\alpha x}.$$

Sostituendo nell'equazione completa

$$B\alpha^2 e^{\alpha x} + 4B\alpha e^{\alpha x} + 4Be^{\alpha x} = e^{\alpha x}.$$

Risolvendo

$$Be^{\alpha x}(\alpha^2 + 4\alpha + 4) = e^{\alpha x} \iff B = \frac{1}{\alpha^2 + 4\alpha + 4}.$$

Osserviamo che l'espressione di B ha senso perché $\alpha \neq -2$ quindi il denominatore non è nullo. Otteniamo quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + 4\alpha + 4}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + 4\alpha + 4}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$