Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 948719 13 luglio 2022

1. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{(x^2)}+1\right)$

(a) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

► (b) ha un asintoto obliquo e nessun altro tipo di asintoto

(c) non ha nessun tipo di asintoto

(d) ha un asintoto verticale e nessun altro tipo di asintoto

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}\log(e^{x^2}+1)$$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua, quindi non ha asintoti verticali. Cerchiamo un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^4+1)}\log\left[e^{x^2}\left(1+e^{-x^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^5(1+o(1))}\left[x^2+\log\left(1+e^{-x^2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^5(1+o(1))}\cdot(1+o(1)) = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4+1}\log\left(e^{x^2}+1\right) - x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[\log(e^{x^2})+\log(1+e^{-x^2})\right] - x(x^4+1)}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[x^2+e^{-x^2}+o(e^{-x^2})\right]-x^5-x}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{-x^2}-x+o(x^3e^{-x^2})}{x^4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}-x^{-2}+o(e^{-x^2})}{x+x^{-1}} = \frac{0}{+\infty} = 0 = q.$$

f ha quindi l'asintoto obliquo di equazione $y=x$ per $x\to+\infty$. Dato che f è dispari, ha anche lo stesso asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

La presenza di asintoti orizzontali è incompatibile con quella degli asintoti obliqui.

2. Sia $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ Allora

(a) f è continua in $(-1,0]$

► (b) $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = f'_+(0)$

(c) $f'(0) = 1$

(d) f è continua in $(-1, +\infty)$

Soluzione:

$$f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{se } x<0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{se } x>0 \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \cos 0 - \sin 0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

3. Se $F(x) = \int_{\log x}^{e^2} \frac{t^2}{e^t + e^{3t}}\, dt$ allora $F'(e^2) =$

(a) $\frac{4}{e^2+e^6}$

(b) $\frac{e^4}{e^{(e^2)} + e^{(3e^2)}}$

► (c) $\frac{-4}{e^8+e^4}$

(d) 0

Soluzione:

$$F(x) = \int_{\log x}^{e^2} \frac{t^2}{e^t + e^{3t}}\, dt$$

$$F'(x) = -\frac{\log^2 x}{e^{\log x} + e^{3\log x}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log^2 x}{x + x^3} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\log^2 x}{x^2 + x^4}$$

$$F'(e^2) = -\frac{\log^2(e^2)}{e^4 + e^8} = \frac{-4}{e^4+e^8}$$

4. $\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\, dx =$

► (a) $-1 + 5\log\frac{5}{4}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $5\log 4 - 5\log 5$

(d) non esiste

Soluzione:

$$\int \frac{x+3}{2-x}\,dx = -\int \frac{x+3}{x-2}\,dx = -\int \frac{x-2+5}{x-2}\,dx = \int -1 - \frac{5}{x-2}\,dx =$$

$$= -x - 5\log|x-2| + c$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\,dx = \Big[-x - 5\log|x-2|\Big]_{-3}^{-2} = 2 - 5\log|-4| - 3 + 5\log|-5| =$$

$$= -1 + 5\log\frac{5}{4}$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(a) diverge positivamente (b) non esiste (c) diverge negativamente (d) converge

Soluzione:

Per $x \to 0$

$$e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e^{\frac{x-1}{x+1}} - e^{-1} = e^{-1}\left(e^{\frac{x-1}{x+1}+1} - 1\right) = e^{-1}\left(e^{\frac{x-\cancel{1}+x+\cancel{1}}{x+1}} - 1\right)$$

$$= e^{-1}\left(e^{\frac{2x}{x+1}} - 1\right) = e^{-1}\left(\cancel{1}+\frac{2x}{x+1} + o\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \cancel{1}\right) =$$

$$= x e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e otteniamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \cancel{x} e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x^{3/2}}} \cdot \cancel{x^{1/2}} = e^{-1} \cdot 2$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, dove $f(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

Per $x \to +\infty$ $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e}$

quindi scegliamo $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ per ottenere

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = e - \frac{1}{e}$. Dato che $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

6. Sia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{(e^{x^2} - 1)\sqrt{x}\log(1+x)}$. Allora

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -\infty$ ► (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ esiste finito (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ non esiste (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = +\infty$

Soluzione:

per $x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{\sin x\,(\cos x - 1)}{(e^{x^2}-1)\sqrt{x}\,\log(1+x)} = \frac{[x+o(x^2)]\,[\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\cancel{-1}]}{[\cancel{1}+x^2+o(x^2)\cancel{-1}]\,x^{1/2}\,[x+o(x)]}$$

$$= \frac{\cancel{x}(1+o(x))\,\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+o(x)\right)}{\cancel{x^2}(1+o(1))\cdot x^{1/2}\,\cancel{x}(1+o(1))} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{x^{1/2}(1+o(1))}$$

scegliamo quindi $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ ottenendo che

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$. Poiché $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ converge,

dal criterio del confronto asintotico abbiamo che

anche $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ converge.

7. $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right)(n^3-e)$

(a) vale $+\infty$

(b) vale $-\infty$

► (c) è un numero reale diverso da 0

(d) vale 0

Soluzione:

$$a_n = \left(\left(\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) (n^3 - e) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{2} n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1 + o(1)\right) n^3 \left(1 + o(1)\right) = 1 + o(1)$$

quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$

8. La successione $a_n = \log(2e^n - n) - n, \quad n \geq 1$

(a) non ha né massimo né minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

► (d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$$a_n = \log(2e^n - n) - n = \log\left(2e^n\left(1 - \frac{n}{2e^n}\right)\right) - n =$$

$$= \log 2 + \cancel{n} + \log\left(1 - \frac{n}{2e^n}\right) - \cancel{n} \longrightarrow \log 2.$$

$$a_n < \log 2 \iff \log(2e^n - n) - n < \log 2$$

$$\iff \log\left(\frac{2e^n - n}{e^n}\right) < \log 2 \iff \frac{2e^n - n}{e^n} < 2$$

$$\iff \cancel{2e^n} - n < \cancel{2e^n} \iff -n < 0 \quad \text{sempre verificata } \forall n \geq 1$$

Quindi $a_n < \log 2 \ \forall n \geq 1$. Ne segue che (a_n) ha minimo ma non ha massimo $(\sup(a_n) = \log 2)$.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-n)^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

► (c) converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} (-n)^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

La serie è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$\left| (-n)^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3} \right| = n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

Proviamo ora ad applicare il criterio della radice

$$\sqrt[n]{n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \sqrt[n]{n^3} \cdot \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$. Consideriamo l'altro fattore.

$$\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \log\left(n \sin \frac{1}{n}\right)} = e^{n^2 \log\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)}$$

$$= e^{n^2 \log\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{6} + o(1)} \longrightarrow e^{-1/6}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}} = 1 \cdot e^{-1/6} = \frac{1}{e^{1/6}} < 1$.

Per il criterio della radice, la serie converge assolutamente.

10. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-4n}\log^2 n}{n+1}$

(a) è indeterminata

(b) diverge a $+\infty$

(c) converge semplicemente ma non assolutamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Sia $a_n = \frac{(-1)^n e^{-4n} \log^2 n}{n+1}$. Vediamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{e^{-4n}\log^2 n}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-4}\sqrt[n]{\log^2 n}}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{e^{-4}\cdot 1}{1} = \frac{1}{e^4} < 1,$$

quindi la serie converge assolutamente.

11. L'insieme dove i gradienti delle due funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$ sono paralleli

► (a) è costituito da infiniti punti allineati

(b) è costituito da un solo punto

(c) è vuoto

(d) è costituito da due punti

Soluzione:

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$g(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-3)$

∇f è parallelo a $\nabla g \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\begin{cases} \cancel{2}x = \lambda \cancel{2}(x-1) \\ \cancel{2}y = \lambda \cancel{2}(y-3) \end{cases}$$

osserviamo che $x=1$ non è soluzione come $y=3$ non è soluzione.

quindi $\begin{cases} \lambda = \frac{x}{x-1} \\ y = \frac{x}{x-1}(y-3) \end{cases} \Rightarrow (x-1)y = x(y-3) \iff \cancel{xy} - y = \cancel{xy} - 3x$

$\iff \boxed{y = 3x}$ che descrive una retta.

12. Gli insiemi di livello della funzione $f(x,y) = \frac{3y}{x}$ sono

(a) archi di iperbole

(b) archi di parabola

► (c) rette private di un punto

(d) ellissi

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{3y}{x}$$

La funzione non è definita per $x = 0$.

Le curve di livello sono descritte dall'equazione

$\frac{3y}{x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $x \neq 0$, moltiplichiamo per x

$3y = \lambda x$ $\quad y = \frac{\lambda}{3} x$ che descrive una retta privata di un punto, dato che $x \neq 0$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 13 luglio 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3|$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Determinare inoltre il numero degli zeri della funzione. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo e del termine al denominatore, dobbiamo imporre $|x-3| \neq 0$ quindi si ha che l'insieme di definizione di f è dato da $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Osserviamo che la funzione è tale che $f(x+3) = f(-x+3)$, questo implica che il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 3$. Inoltre possiamo calcolare il limite per $x \to 3$ con la sostituzione $t = |x-3|$ come segue

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{|x-3|}} + 5\log|x-3| = \lim_{t\to 0^+} \frac{2 + 5\sqrt{t}\log t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

La retta $x = 3$ risulta essere un asintoto verticale per f. Calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Escludiamo la presenza di asintoti obliqui poichè $f(x) \sim 5\log|x-3|$ per $x \to \pm\infty$. La funzione è derivabile nel suo insieme di definizione in quanto composizione di funzioni derivabili. Ne calcoliamo la derivata prima ed otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right) & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{x-3}\left(5 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}\right) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

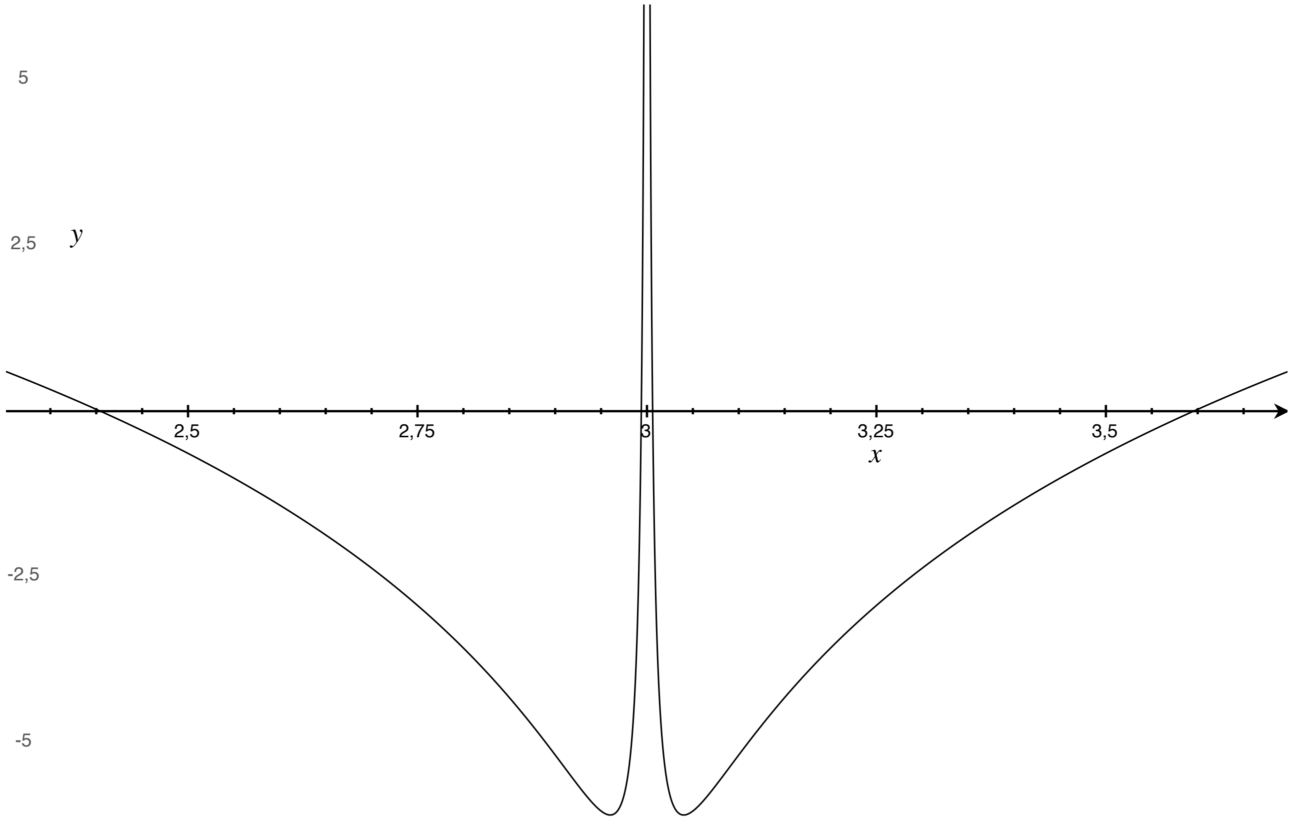
Si ha che $f'(x) = 0$ in $x = \frac{74}{25}$ e in $x = \frac{76}{25}$ con $f'(x) > 0$ per $\frac{74}{25} < x < 3$ e per $x > \frac{76}{25}$. Ne deduciamo che i punti $x = \frac{74}{25}$ e $x = \frac{76}{25}$ sono di minimo assoluto per f, f è crescente in $\left[\frac{74}{25}, 3\right)$ e in $\left[\frac{76}{25}, +\infty\right)$, mentre f è decrescente in $\left(-\infty, \frac{74}{25}\right]$ e in $\left(3, \frac{76}{25}\right]$. Inoltre vale $f\left(\frac{74}{25}\right) = f\left(\frac{76}{25}\right) = 10(1 - \log 5) < 0$. Poichè $f(0) > 0$, il teorema degli zeri ci garantisce che f ammette quattro zeri x_1, x_2, x_3, x_4 con

$$0 < x_1 < \frac{74}{25} < x_2 < 3 < x_3 < \frac{76}{25} < x_4.$$

Sfruttiamo ora la simmetria rispetto alla retta $x = 3$ e calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 3$. Abbiamo per $x < 3$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{(3-x)^{5/2}} - \frac{5}{(x-3)^2}$$

che si annulla per $x = \frac{291}{100}$ ed è strettamente positiva per $\frac{291}{100} < x < 3$, intervallo ove la funzione risulta quindi strettamente convessa. La funzione risulta invece concava per $-\infty < x < \frac{291}{100}$. Il punto $x = \frac{291}{100}$ è di flesso. Per simmetria concludiamo nel caso $x > 3$.



Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Soluzione

Visto che $e^{(x^2)} - 1 \neq 0$ per $x > 0$, l'unico punto problematico per la continuità è $x = 0$. Ovviamente si ha $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$, quindi basta preoccuparsi del $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Usando gli sviluppi di Taylor vediamo che

$$\frac{\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2}{e^{(x^2)} - 1} = \frac{(\alpha - 1)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

da cui segue che il limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ è 0 se e solo se $\alpha = 1$. Dunque la $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 1$, e per $\alpha \neq 1$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma discontinua in 0.

Per quanto riguarda la derivabilità, la $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per qualsiasi α, con derivata $f'(x) = 0$ se $x < 0$ e

$$f'(x) = \frac{(2\alpha x \cos(\alpha x^2) - 2 \sin x \cos x)(e^{(x^2)} - 1) - (\sin(\alpha x^2) - (\sin x)^2)(2x e^{(x^2)})}{(e^{(x^2)} - 1)^2}$$

se $x > 0$.

Rimane da preoccuparsi di $x = 0$, e visto che derivabile implica continua, l'unica possibilità è che $\alpha = 1$. Chiaramente $f'_-(0) = 0$, quindi dobbiamo vedere se $f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} = 0$ oppure no.

Per $h \to 0^+$, sviluppando il numeratore a ordine 3 abbiamo

$$\frac{f(h) - 0}{h} = \frac{\sin(h^2) - (\sin h)^2}{h(e^{(h^2)} - 1)} = \frac{h^2 + o(h^3) - (h^2 + o(h^3))}{h^3 + o(h^3)} = \frac{o(h^3)}{h^3 + o(h^3)} \to 0$$

e quindi la $f(x)$ per $\alpha = 1$ è effettivamente derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza, semplice ed assoluta, della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n + \sqrt[(n^2)]{n}}{n}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, in quanto $\sqrt[(n^2)]{n} = n^{\frac{1}{n^2}} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la convergenza semplice e assoluta sono equivalenti.

Scriviamo

$$\sum_n \frac{(-1)^n + \sqrt[(n^2)]{n}}{n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n} + \sum_n \frac{\sqrt[(n^2)]{n}}{n}.$$

La prima serie converge per il criterio di Leibnitz. Per quanto riguarda la seconda serie, visto che

$$\sqrt[(n^2)]{n} = n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\log n}{n^2}} \to e^0 = 1$$

quando $n \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha lo stesso comportamento della serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$, che diverge positivamente.

In conclusione, la serie data diverge positivamente.