Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	vecchio regolamento 15 giugno 2022

1. La funzione $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x + \cos^2 x$

(a) ha 2 punti di massimo locale e 2 di minimo locale

► (b) ha 2 punti di massimo locale e 3 punti di minimo locale

(c) non ha punti né di massimo né di minimo locale

(d) ha un solo punto di massimo locale e due di minimo locale

Soluzione:

$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x + \cos^2 x$

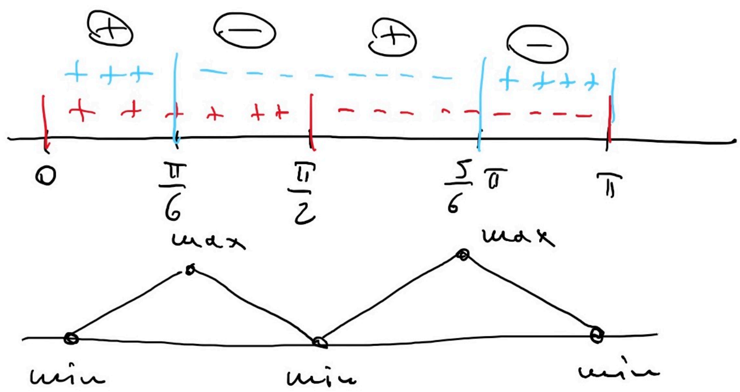
$f'(x) = \cos x - 2\cos x \sin x = \cos x\,(1 - 2\sin x)$

$f'(x) > 0 \iff \cos x\,(1-2\sin x) > 0$

$\cos x > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$1 - 2\sin x > 0 \iff 2\sin x < 1 \iff \sin x < \frac{1}{2} \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$

segno di f'



f ha 3 punti di minimo locale e 2 di massimo locale

2. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4}$

(a) non esiste

► (b) è un numero reale diverso da 0

(c) vale $+\infty$

(d) vale 0

3. L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - \frac{1}{x} + \sin x < 0\}$ è

► (a) superiormente ma non inferiormente limitato

(b) né superiormente né inferiormente limitato

(c) inferiormente ma non superiormente limitato

(d) limitato

4. Indicando con $[x]$ la parte intera di x, $\displaystyle\int_1^3 x^{[x]}\,dx =$

(a) $\dfrac{211}{12}$ ► (b) $\dfrac{47}{6}$ (c) $27\log 3 - 26$ (d) 23

Soluzione:

$$x^{[x]} = \begin{cases} x & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ x^2 & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^3 x^{[x]}\,dx = \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} + \frac{19}{3} = \frac{9+38}{6} = \frac{47}{6}$$

5. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{t}\,dt =$

► (a) $\dfrac{7}{3}$ (b) $\dfrac{5}{3}$ (c) $\dfrac{8e^3}{3}$ (d) $3e^2 - e$

6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)\,dx =$

(a) $\dfrac{1}{6}$ (b) $\sqrt{\pi^3}$ ► (c) 0 (d) $\dfrac{\pi}{3}$

7. La successione $a_n = n\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n+1} + \dfrac{1-(-1)^n}{n^2+1}\right)$, definita per $n \ge 1$

(a) ha minimo ma non ha massimo (b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo ► (d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$a_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n^2+1}\right), \quad n \geq 1$$

indici pari

$$a_{2n} = 2n\left(\frac{1+1}{2n+1} + \cancel{\frac{1-1}{4n^2+1}}\right) = \frac{4n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2$$

indici dispari

$$a_{2n+1} = (2n+1)\left(\cancel{\frac{1-1}{2n+2}} + \frac{1-(-1)}{(2n+1)^2+1}\right) = \frac{(2n+1)\cdot 2}{(2n+1)^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4n}{2n+1} > 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

$$a_{2n} = \frac{4n}{2n+1} < 2 \iff 4n < 4n+4 \quad \text{sempre vera}$$

quindi $\quad 0 < a_{2n} < 2 \quad \forall\, n \geq 1.$

$$a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2+1} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2+1} < 2 \iff (2n+1) < (2n+1)^2+1 \quad \text{sempre vera}$$

quindi $\quad 0 < a_{2n+1} < 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Ne segue che $\quad 0 < a_n < 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Dai risultati sui limiti otteniamo che

$\inf(a_n) = 0, \quad \sup(a_n) = 2$

e che (a_n) non ha né max né min perché $a_n \neq 0$

$a_n \neq 2 \quad \forall\, n \geq 1.$

8. Sia (a_n) la successione definita da $a_n = n^2 \sin \dfrac{n\pi}{2}$. Allora

- ► (a) non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- (b) (a_n) è limitata
- (c) (a_n) è limitata inferiormente
- (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

9. La successione $a_n = \dfrac{e^n - 2^{n \log n}}{n^n}$ definita per $n \geq 1$

- (a) tende a $+\infty$
- (b) tende a $-\infty$
- (c) non ha limite
- ► (d) tende a 0

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 2y - y' \\ y(-4) = \dfrac{e^{12}+3}{e^4} \\ y'(-4) = \dfrac{3-2e^{12}}{e^4} \end{cases}$ allora $y(2) =$

► (a) $\dfrac{3e^6+1}{e^4}$ (b) $\dfrac{\cos 6 + \sin 6}{2e}$ (c) $\dfrac{e^{12}-2e^{18}+3e^6+3}{e^8}$ (d) $\dfrac{e^6+1}{e^4}$

11. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + 1 + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ allora $y(0) =$

► (a) $\dfrac{4}{e} - 2$ (b) 0 (c) 1 (d) $2 - \dfrac{2}{e}$

12. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -15. \end{cases}$ Allora risulta che $\lim_{x \to +\infty} y(x) =$

(a) $+\infty$ (b) 0 ► (c) $-\infty$ (d) non esiste

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica (vecchio regolamento)

Pisa, 15 giugno 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \left(\log\left|e^{3x} - 4\right|\right) + 5x$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del valore assoluto, l'argomento del logaritmo è sempre non-negativo quindi la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto $x_0 = \frac{\log 4}{3}$ in cui l'argomento si annullerebbe. Si ha $D = (-\infty, \frac{\log 4}{3}) \cap (\frac{\log 4}{3}, +\infty)$. La funzione è continua perché composizione e somma di funzioni continue nel loro dominio di definizione. Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\log 4}{3}} f(x) = -\infty.$$

Dall'ultimo limite segue che la retta $x = \frac{\log 4}{3}$ è un asintoto verticale per f. Osserviamo inoltre che, per $x \to +\infty$

$$f(x) = \left(\log\left|e^{3x} - 4\right|\right) + 5x = \left(\log\left(e^{3x} - 4\right)\right) + 5x = \log\left(e^{3x}(1 - 4e^{-3x})\right) + 5x = 3x + \log(1 - 4e^{-3x}) + 5x = 8x + o(1).$$

Mentre, per $x \to -\infty$ si ha

$$f(x) = \log(4 - e^{3x}) + 5x = \log\left[4\left(1 - \frac{1}{4}e^{3x}\right)\right] + 5x = 5x + \log 4 + o(1).$$

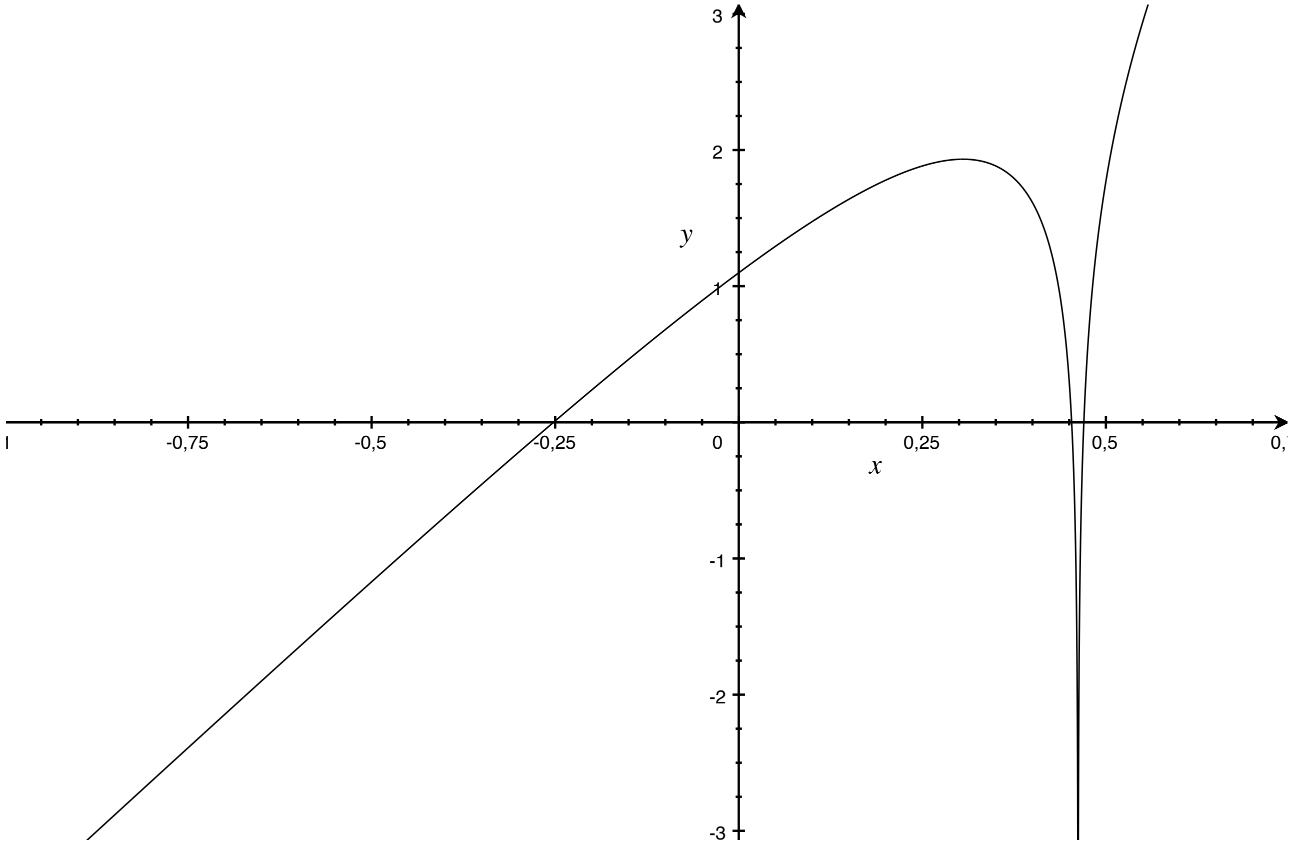
Quindi la retta $y = 8x$ è un asintoto obliquo per f per x che tende a $+\infty$, mentre la retta $y = 5x + \log 4$ è un asintoto obliquo per f quando x tende a $-\infty$. La funzione è derivabile nel suo dominio in quanto composizione di funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} - 4} + 5 = \frac{4(2e^{3x} - 5)}{e^{3x} - 4}$$

che esiste in tutti i punti del dominio. Studiando il segno della derivata prima ricaviamo che $f' > 0$ per $x > \frac{\log 4}{3}$ e per $x < \frac{\log(5/2)}{3}$. La funzione è quindi strettamente crescente per $x > \frac{\log 4}{3}$ e per $x < \frac{\log(5/2)}{3}$, mentre è strettamente decrescente per $\frac{\log(5/2)}{3} < x < \frac{\log 4}{3}$. L'unico punto appartenente al dominio in cui la derivata prima si annulla è il punto $x = \frac{\log(5/2)}{3}$ che è punto di massimo locale. Osserviamo che $f(0) = \log 3$. Per determinare la convessità della funzione calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{24e^{3x}(e^{3x} - 4) - 12e^{3x}(2e^{3x} - 5)}{(e^{3x} - 4)^2} = -\frac{36e^{3x}}{(e^{3x} - 4)^2}.$$

La derivata seconda risulta sempre negativa e di conseguenza la funzione è concava sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right)$ e sulla semiretta $\left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$.



Esercizio 2 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos(3x).$$

Soluzione

Esercizio 3 Determinare se la successione

$$a_n = \left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right),\ n \geq 0$$

ammette massimo e/o minimo.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$. Notiamo che per $n \to +\infty$ abbiamo $\frac{1}{n+1} \to 0$ e $\frac{n}{n^2+1} \to 0$, e possiamo applicare i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right)}{n/(n^2+1)} = 1.$$

Otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right) \quad =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{3}{2}}+1\right) \cdot \frac{1}{n+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n^2+1} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)}-1\right)}{n/(n^2+1)} \quad =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(n^{\frac{3}{2}}+1\right)}{(n^2+1)(n+1)} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)}-1\right)}{n/(n^2+1)} = 0$$

dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(n^{\frac{3}{2}}+1\right)}{(n^2+1)(n+1)} = 0$, in quanto l'esponente massimo di n a denominatore è maggiore di quello a numeratore.

Notiamo inoltre che se $n > 0$, visto che $0 < \frac{1}{n+1} < 1$, abbiamo $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0$, e da $n/(n^2+1) > 0$ segue che $e^{n/(n^2+1)} - 1 > 0$. Ovviamente vale anche $n^{\frac{3}{2}} + 1 > 0$ per ogni $n \geq 0$.

In conclusione abbiamo che $a_n > 0$ per ogni $n > 0$, mentre per $n = 0$ si ha $a_0 = 0$. Da questo e dal calcolo del limite (usando l'analogo del "teorema di Weierstrass generalizzato" per successioni) segue che a_n ammette sia massimo che minimo.