Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 199142 15 giugno 2022

1. La funzione $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x + \cos^2 x$

(a) ha 2 punti di massimo locale e 2 di minimo locale

► (b) ha 2 punti di massimo locale e 3 punti di minimo locale

(c) non ha punti né di massimo né di minimo locale

(d) ha un solo punto di massimo locale e due di minimo locale

Soluzione:

$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x + \cos^2 x$

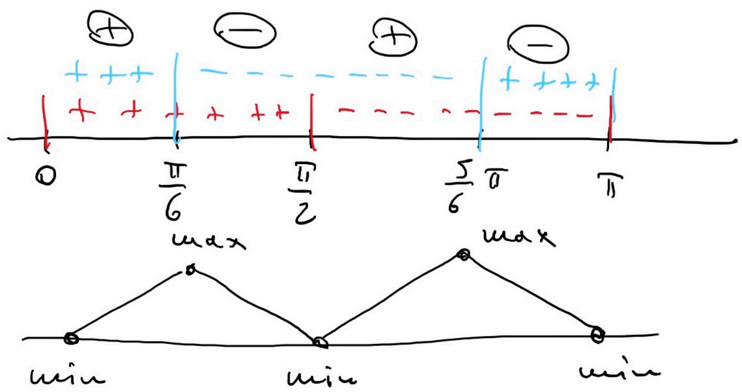
$f'(x) = \cos x - 2\cos x \sin x = \cos x\,(1 - 2\sin x)$

$f'(x) > 0 \iff \cos x\,(1 - 2\sin x) > 0$

$\cos x > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$1 - 2\sin x > 0 \iff 2\sin x < 1 \iff \sin x < \frac{1}{2} \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$

segno di f'



f ha 3 punti di minimo locale e 2 di massimo locale

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x - x}{x\sin(2x)} =$

(a) $+\infty$ ► (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) non esiste

Soluzione:

$$\frac{x e^x - x}{x \sin(2x)} = \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \frac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}}{2x + o(4x^2)} = \frac{1 + o(1)}{2 + o(x)} \to \frac{1}{2}$$

per $x \to 0$

3. Indicando con $[x]$ la parte intera di x, $\int_1^3 x^{[x]}\, dx =$

► (a) $\frac{47}{6}$ (b) $27 \log 3 - 26$ (c) $\frac{211}{12}$ (d) 23

Soluzione:

$$x^{[x]} = \begin{cases} x & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ x^2 & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^3 x^{[x]}\, dx = \int_1^2 x\, dx + \int_2^3 x^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} + \frac{19}{3} = \frac{9 + 38}{6} = \frac{47}{6}$$

4. $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\log x)^2} =$

(a) $1 - \log 2$ ► (b) $\frac{1}{\log 2} - 1$ (c) $1 - \frac{1}{\log 2} - \log(\log 2)$ (d) $\frac{1}{\log 2} - \log 2$

Soluzione:

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} \qquad \log x = t \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{dx}{x} = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$

$$\int_{1/e}^{1/2} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{1/e}^{1/2} = -\frac{1}{\log \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log \frac{1}{e}} = -\frac{1}{-\log 2} + \frac{1}{-\log e}$$

$$= \frac{1}{\log 2} - 1$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

► (a) diverge positivamente (b) non esiste (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

La funzione non è definita per $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + o(x^2)}{x} = 1$$

inoltre $\left|\cos \frac{1}{x^2}\right| \leq 1$ quindi f è limitata in un intorno di 0 ed è continua in $(0,+\infty)$. Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge (definendo f in un modo qualsiasi in $x=0$, diventa un integrale di Riemann).

Per $x\to\infty$ $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{1}{x^2} \to 1$. Prendiamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{2}.$$ Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

6. Sia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $\quad x \neq 0$. Allora

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste

(b) $\displaystyle\int_0^{3} |f(x)|\,dx$ converge

► (c) $\displaystyle\int_7^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

(d) $\displaystyle\int_3^{200} f(x)\,dx$ non converge

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

per $x \to \infty$ $\quad \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\quad$ e $\quad \int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge

Per il criterio del confronto $\quad \int_7^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ converge

quindi $\quad \int_7^{+\infty} f(x) dx$ converge assolutamente, pertanto

converge.

7. La successione $a_n = n \left(\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n^2+1} \right)$, definita per $n \geq 1$

(a) ha minimo ma non ha massimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

► (d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$$a_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n^2+1}\right), \quad n \geq 1$$

indici pari

$$a_{2n} = 2n\left(\frac{1+1}{2n+1} + \cancel{\frac{1-1}{4n^2+1}}\right) = \frac{4n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2$$

indici dispari

$$a_{2n+1} = (2n+1)\left(\cancel{\frac{1-1}{2n+2}} + \frac{1-(-1)}{(2n+1)^2+1}\right) = \frac{(2n+1)\cdot 2}{(2n+1)^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4n}{2n+1} > 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

$$a_{2n} = \frac{4n}{2n+1} < 2 \iff 4n < 4n+4 \quad \text{sempre vera}$$

quindi $\quad 0 < a_{2n} < 2 \quad \forall\, n \geq 1.$

$$a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2+1} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2+1} < 2 \iff (2n+1) < (2n+1)^2+1 \quad \text{sempre vera}$$

quindi $\quad 0 < a_{2n+1} < 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Ne segue che $\quad 0 < a_n < 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Dai risultati sui limiti otteniamo che

$\inf(a_n) = 0, \quad \sup(a_n) = 2$

e che (a_n) non ha né max né min perché $a_n \neq 0$

$a_n \neq 2 \quad \forall\, n \geq 1.$

8. La successione $a_n = \left(5n - \dfrac{1}{n^2}\right)\log\left(1 - \dfrac{4}{n}\right)$ con $n \geq 5$

► (a) è limitata inferiormente

(b) non ha segno costante

(c) diverge a $-\infty$

(d) è infinitesima

Soluzione:

$$a_n = \left(5n - \frac{1}{n^2}\right) \log\left(1 - \frac{4}{n}\right) \qquad n \geq 5$$

per $n \to +\infty$

$$a_n = n\left(5 - \frac{1}{n^3}\right)\left(-\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 5n\left(1 + o(1)\right)\left(-\frac{4}{n}\right)\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= -\frac{4}{5}\left(1 + o(1)\right) \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{4}{5}$$

quindi (a_n) è limitata, in particolare lo è inferiormente.

9. La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n e^{\sin n}}{n \log^2 n}$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge negativamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n e^{\sin n}}{n \log^2 n}$$

$$\left| \frac{(-1)^n e^{\sin n}}{n \log^2 n} \right| = \frac{e^{\sin n}}{n \log^2 n} \leq \frac{e}{n \log^2 n}$$

La serie $\sum_n \frac{e}{n \log^2 n}$ converge perchè è del tipo

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ con $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

quindi, per il criterio del confronto, converge anche

$\sum_n \left| \frac{(-1)^n e^{\sin n}}{n \log^2 n} \right|$, cioè $\sum_n \frac{(-1)^n e^{\sin n}}{n \log^2 n}$

converge assolutamente.

10. La serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2 + 3n(-1)^n}$

► (a) converge assolutamente

(b) diverge positivamente

(c) è indeterminata

(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}\right| = \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$$

prendiamo $b_n = \frac{1}{n^2}$ e $a_n = \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$.

Risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Dato che $\sum_n b_n$ converge, per il criterio del confronto, $\sum_n \frac{1}{|2n^2+3n(-1)^n|}$ converge, quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$ converge assolutamente.

11. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

► (a) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(b) non ha nessuna derivata parziale

(c) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(d) ha la derivata parziale rispetto a y ma non quella rispetto a x

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\cancel{\frac{\sqrt[3]{h\cdot 0}}{\sqrt{h^2+0}}} - 0 \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\cancel{\frac{\sqrt[3]{0\cdot h^2}}{\sqrt{0+h^2}}} - 0 \right) = 0$$

quindi esistono entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione di f alla curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.

$$f(\gamma(t)) = \frac{\sqrt[3]{t^3}}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}\cdot|t|} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{t\to 0^-} f(\gamma(t)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2} =$

(a) 0 (b) non esiste ► (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 15 giugno 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \left(\log \left|e^{3x} - 4\right|\right) + 5x$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali, estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, intervalli di convessità e concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del valore assoluto, l'argomento del logaritmo è sempre non-negativo quindi la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto $x_0 = \frac{\log 4}{3}$ in cui l'argomento si annullerebbe. Si ha $D = (-\infty, \frac{\log 4}{3}) \cap (\frac{\log 4}{3}, +\infty)$. La funzione è continua perché composizione e somma di funzioni continue nel loro dominio di definizione. Agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\log 4}{3}} f(x) = -\infty.$$

Dall'ultimo limite segue che la retta $x = \frac{\log 4}{3}$ è un asintoto verticale per f. Osserviamo inoltre che, per $x \to +\infty$

$$f(x) = \left(\log \left|e^{3x} - 4\right|\right) + 5x = \left(\log \left(e^{3x} - 4\right)\right) + 5x = \log \left(e^{3x}(1 - 4e^{-3x})\right) + 5x = 3x + \log(1 - 4e^{-3x}) + 5x = 8x + o(1).$$

Mentre, per $x \to -\infty$ si ha

$$f(x) = \log(4 - e^{3x}) + 5x = \log \left[4\left(1 - \frac{1}{4}e^{3x}\right)\right] + 5x = 5x + \log 4 + o(1).$$

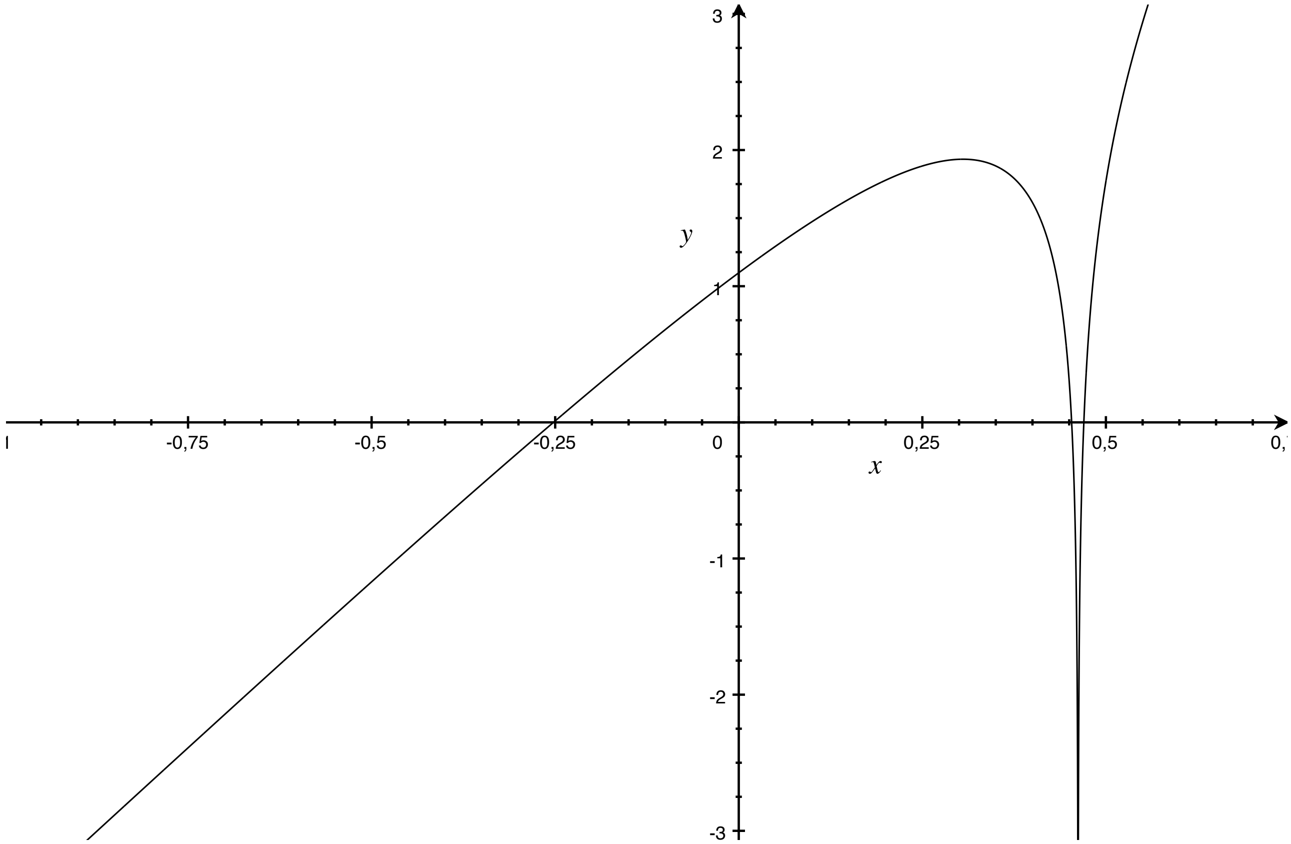
Quindi la retta $y = 8x$ è un asintoto obliquo per f per x che tende a $+\infty$, mentre la retta $y = 5x + \log 4$ è un asintoto obliquo per f quando x tende a $-\infty$. La funzione è derivabile nel suo dominio in quanto composizione di funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} - 4} + 5 = \frac{4(2e^{3x} - 5)}{e^{3x} - 4}$$

che esiste in tutti i punti del dominio. Studiando il segno della derivata prima ricaviamo che $f' > 0$ per $x > \frac{\log 4}{3}$ e per $x < \frac{\log(5/2)}{3}$. La funzione è quindi strettamente crescente per $x > \frac{\log 4}{3}$ e per $x < \frac{\log(5/2)}{3}$, mentre è strettamente decrescente per $\frac{\log(5/2)}{3} < x < \frac{\log 4}{3}$. L'unico punto appartenente al dominio in cui la derivata prima si annulla è il punto $x = \frac{\log(5/2)}{3}$ che è punto di massimo locale. Osserviamo che $f(0) = \log 3$. Per determinare la convessità della funzione calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{24e^{3x}(e^{3x} - 4) - 12e^{3x}(2e^{3x} - 5)}{(e^{3x} - 4)^2} = -\frac{36e^{3x}}{(e^{3x} - 4)^2}.$$

La derivata seconda risulta sempre negativa e di conseguenza la funzione è concava sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{\log 4}{3}\right)$ e sulla semiretta $\left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$.



Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx.$$

Soluzione

Notiamo che l'integrale presenta potenzialmente un problema in 0, e sicuramente un problema a $+\infty$. Inoltre, indipendentemente da α, l'integranda $f(x) = \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}$ è positiva in $(0, +\infty)$.

Studiamo separatamente i due integrali "monoproblema"

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx.$$

Partiamo dal secondo, il cui comportamento non dipende da α: poiché $\arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7}\, dx$ converge, per il criterio del confronto possiamo concludere che $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx$ converge qualsiasi sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

Passiamo al primo integrale. Dato che $\alpha > 0$, allora per $x \to 0$ abbiamo che anche $x^\alpha \to 0$, e lo sviluppo di Taylor di arctan in 0 ci dà $\arctan(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x \to 0$. Abbiamo dunque

$$f(x) = \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7} = \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^7} = \frac{1 + o(1)}{x^{7-\alpha}}$$

per $x \to 0$. Applicando il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{7-\alpha}}$ e notando che $\int_0^1 \frac{1}{x^{7-\alpha}}\, dx$ converge se e solo se $7 - \alpha < 1$, cioè $\alpha > 6$, concludiamo che $\int_0^1 \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx$ (e dunque anche $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^7}\, dx$) converge se e solo se $\alpha > 6$, e diverge positivamente altrimenti.

Esercizio 3 Determinare se la successione

$$a_n = \left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right), \ n \geq 0$$

ammette massimo e/o minimo.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Notiamo che per $n \to +\infty$ abbiamo $\frac{1}{n+1} \to 0$ e $\frac{n}{n^2+1} \to 0$, e possiamo applicare i limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} = 1 \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right)}{n/(n^2+1)} = 1.$$

Otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right) \cdot \frac{1}{n+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n^2+1} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right)}{n/(n^2+1)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(n^{\frac{3}{2}} + 1\right)}{(n^2+1)(n+1)} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \frac{\left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right)}{n/(n^2+1)} = 0$$

dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\left(n^{\frac{3}{2}}+1\right)}{(n^2+1)(n+1)} = 0$, in quanto l'esponente massimo di n a denominatore è maggiore di quello a numeratore.

Notiamo inoltre che se $n > 0$, visto che $0 < \frac{1}{n+1} < 1$, abbiamo $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0$, e da $n/(n^2+1) > 0$ segue che $e^{n/(n^2+1)} - 1 > 0$. Ovviamente vale anche $n^{\frac{3}{2}} + 1 > 0$ per ogni $n \geq 0$.

In conclusione abbiamo che $a_n > 0$ per ogni $n > 0$, mentre per $n = 0$ si ha $a_0 = 0$. Da questo e dal calcolo del limite (usando l'analogo del "teorema di Weierstrass generalizzato" per successioni) segue che a_n ammette sia massimo che minimo.