Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 456810 18 maggio 2022

1. La derivata della funzione $f(x) = x^{(x^x)}$ è

► (a) $x^{(x^x+x)}\left((\log x)^2 + \log x + \dfrac{1}{x}\right)$ (b) $x^{(x^x-1)}x^x$

(c) $x^{(x^x)}\log x$ (d) $x^{(x^x)}(x^{x-1}\log x)$

Soluzione:

$$f(x) = x^{(x^x)} = e^{x^x \log x} = e^{e^{x\log x}\cdot \log x}$$

$$f'(x) = e^{e^{x\log x}\cdot\log x}\cdot\left[e^{x\log x}\cdot\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\log x + e^{x\log x}\cdot\frac{1}{x}\right] =$$

$$= x^{(x^x)}\cdot\left[x^x(\log x + 1)\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right] =$$

$$= x^{(x^x)}\cdot x^x\left(\log^2 x + \log x + \frac{1}{x}\right) = x^{(x^x+x)}\left(\log^2 x + \log x + \frac{1}{x}\right)$$

2. La funzione $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\tan x}{x(1+\tan^2 x)}$

► (a) non ha asintoti (b) ha due asintoti verticali (c) ha un asintoto verticale (d) ha un asintoto obliquo

Soluzione:

$f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x(1+\operatorname{tg}^2 x)}$

Dato che il dominio di f è limitato, f può avere solo asintoti verticali.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{0(1+0)} \quad \text{indeterminata}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x(1+\operatorname{tg}^2 x)} = \frac{x+o(x^2)}{x(1+o(1))} = \frac{x(1+o(x))}{x(1+o(1))} \to 1 \quad \text{per } x \to 0^+$$

quindi non c'è asintoto per $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}(1+\infty)} \quad \text{indeterminata}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x(1+\operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1}{x\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right)} \xrightarrow{\text{per } x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{+\infty} + +\infty\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(0+\infty)} = 0$$

quindi non c'è asintoto neanche per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

f non ha asintoti.

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\arctan(\log x))}{x\,(1+(\log x)^2)}\,dx =$

(a) $\sin(\arctan e) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sin e - \sin 1$ ► (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{4e} - 1$

Soluzione:

$$\int \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\log x))}{x(1+\log^2 x)}\,dx$$ sostituzione $\log x = t$ $\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{dx}{x} = dt$$

$$= \int \frac{\cos(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}\,dt$$ sostituzione $z = \operatorname{arctg} t$ $\quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dt}{1+t^2} = dz$$

$$= \int \cos z\,dz = \sin z + c = \sin(\operatorname{arctg} t) + c = \sin(\operatorname{arctg}(\log x)) + c$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\log x))}{x(1+\log^2 x)}\,dx = \Big[\sin(\operatorname{arctg}(\log x))\Big]_1^e =$$

$$= \sin(\operatorname{arctg}(\log e)) - \sin(\operatorname{arctg}(\log 1)) =$$

$$= \sin(\operatorname{arctg} 1) - \sin(\operatorname{arctg} 0) = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. $\int_0^\pi 3x\cos x\,dx =$

(a) π (b) $\frac{3}{2}$ ► (c) -6 (d) 0

Soluzione:

$$\int 3x\cos x\,dx$$ integriamo per parti derivando x e integrando cos x

$$= 3\int x\cos x\,dx = 3\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\right) =$$

$$= 3(x\sin x + \cos x) + c$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi 3x\cos x\,dx = \Big[3(x\sin x + \cos x)\Big]_0^\pi = 3(\cancel{\pi\cdot\sin\pi} + \cos\pi)$$

$$- 3(\cancel{0\cdot\sin 0} + \cos 0) = 3(-1) - 3\cdot 1 = -6$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}\, dx$

(a) converge ► (b) non esiste (c) diverge negativamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_{-1}^{2} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}\, dx$$

La funzione $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}$ non è definita per $x = 0$.

Utilizzando la formula di Taylor per $x \to 0$, otteniamo

$$f(x) = \frac{1 + x + o(x) - (1 + o(x))}{x\,(x + o(x^2))} = \frac{x + o(x)}{x^2(1 + o(x))} = \frac{1}{x}\,\frac{1 + o(1)}{1 + o(x)}$$

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 0$.

Usiamo il criterio di confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Dato che $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x}\, dx = +\infty$ avremo che

$$\int_0^2 f(x)\,dx = +\infty .$$

Dato che $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx = -\infty$ allora anche $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\infty$

Quindi $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ non esiste.

6. Sia $f(x) = x^3 e^{-x}$. Allora

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ esiste finito (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$ ► (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = -\infty$

Soluzione:

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\infty$

Se $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$. Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x} = 0$$

Dato che $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

7. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^4 + n^3}}{\sqrt[3]{n}} =$

(a) 0

(b) $-\infty$

► (c) $-\frac{1}{3}$

(d) $\frac{1}{3}$

Soluzione:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+n^2} - \sqrt[3]{n^4+n^3}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{\left[n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]^{1/3} - \left[n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{1/3}}{n^{1/3}} =$$

$$= \left[n^{4/3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3} - n^{4/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right] n^{-1/3} =$$

$$= n^{4/3}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] n^{-1/3} =$$

$$= n\left[\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{3}+o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor del binomiale

$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$ per $t\to 0$ con $\alpha = \frac{1}{3}$.

8. La successione

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}\left(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)n^4$$

► (a) diverge a $-\infty$ (b) tende a 0 (c) tende a $\frac{1}{6}$ (d) non ha limite

Soluzione:

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}\left(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)n^4$$

osserviamo che $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^0 = 1$

inoltre $\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n} = \frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)-\frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)n^4 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)n^4 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot n^4 = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = +\infty\left(-\frac{1}{6}\right) = -\infty.$$

quindi (a_n) diverge a $-\infty$.

9. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}$

► (a) converge assolutamente
(b) converge ma non converge assolutamente
(c) diverge positivamente
(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$a_n = \frac{n^3}{e^n}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2} \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

La serie è a termini positivi, proviamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{e}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n.$$ Ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$.

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(1+o(1))} \to e^{1/2}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1\cdot e^{1/2}}{e} = \frac{1}{e^{1/2}} < 1$.

La serie converge per il criterio della radice, quindi converge anche assolutamente dato che è a termini positivi.

10. La serie $\sum_{n} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}$

(a) è indeterminata
► (b) converge assolutamente
(c) diverge a $-\infty$
(d) converge semplicemente ma non assolutamente

Soluzione:

$$a_n = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) e^{-3n} \log^3 n}{2n+1}.$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{|\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})| e^{-3n} \log^3 n}{2n+1} \leq \frac{e^{-3n} \log^3 n}{2n+1}$$

Usiamo ora il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{\frac{e^{-3n} \log^3 n}{2n+1}} = \frac{e^{-3} \sqrt[n]{\log^3 n}}{\sqrt[n]{2n+1}} \longrightarrow \frac{e^{-3} \cdot 1}{1} = \frac{1}{e^3} < 1$$

quindi la serie $\sum_n \frac{e^{-3n} \log^3 n}{2n+1}$ converge.

Per il criterio del confronto $\sum_n |a_n|$ converge

quindi la serie converge assolutamente.

11. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\arctan(xy)| \leq 1\}$

(a) non è chiuso

(b) è aperto

► (c) non è limitato

(d) ha complementare limitato

Soluzione:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\operatorname{arctg}(xy)| \leq 1\}.$$

Osserviamo che se $x=0 \Rightarrow |\operatorname{arctg}(xy)| = |\operatorname{arctg} 0| = 0 \leq 1$

quindi A contiene l'asse y, pertanto A non è limitato.

12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \sqrt{\log(x^2-y)} =$

► (a) non esiste

(b) $+\infty$

(c) 0

(d) $-\infty$

Soluzione:

Consideriamo la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ che è

una parabola, quindi $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$.

Consideriamo la restrizione di f a γ:

$f(\gamma(t)) = \sqrt{\log(t^2 - (t^2-1))} = \sqrt{\log 1} = 0$

quindi $\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)) = 0$.

Consideriamo ora la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}$ che è un'altra parabola.

$\lim_{t\to\infty} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\log(t^2 - (t^2-2))} = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\log 2} = \sqrt{\log 2} \neq 0$

quindi $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ non esiste.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 18 maggio 2022

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{1-|x|}}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (oppure estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali, punti angolosi e di cuspide, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita se $x \neq \pm 1$ ed è continua in tutto il suo insieme di definizione. L'unico punto dove potrebbe essere non derivabile è $x = 0$ a causa del valore assoluto. Lo verificheremo in seguito. Osserviamo che

$$f(-x) = -xe^{\frac{1}{1-|-x|}} = -f(x)$$

quindi la funzione è dispari. La studieremo quindi per $x \geq 0$ sfruttando la simmetria.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-1^-}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-1^+}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\, e^{\frac{1}{-\infty}} = +\infty\, e^0 = +\infty.$$

Otteniamo quindi che la funzione ha un asintoto verticale (da sinistra) di equazione $x = 1$ e che $\sup(f) = +\infty$. Per simmetria, f ha un asintoto verticale (da destra) di equazione $x = -1$ e $\inf(f) = -\infty$. La funzione quindi non ha né massimo né minimo. Non ci sono asintoti orizzontali ma potrebbero esserci quelli obliqui.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{1-|x|}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1 =: m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{1-|x|}} - x = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{1-x}} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x}(1 + o(1)) = -1 =: q.$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$ per $x \to +\infty$. Per simmetria esiste anche un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ per $x \to -\infty$.

Studiamo ora la monotonia valutando il segno della derivata, considerando il caso $x > 0$.

$$f'(x) = 1\, e^{\frac{1}{1-x}} + xe^{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} = e^{\frac{1}{1-x}}\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) = e^{\frac{1}{1-x}}\, \frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2}.$$

Risulta quindi immediato che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Osserviamo che esiste finito

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = e$$

quindi, dato che f è continua in $x = 0$ otteniamo che $f'_+(0) = e$ e, per simmetria, anche $f'_-(0) = e$. Ne segue che f è derivabile anche in $x = 0$. Sempre dal fatto che f è dispari abbiamo che $f'(x) > 0$ per ogni x nell'insieme di definizione. Ne segue che f è strettamente crescente sugli intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$. Non ci sono punti di massimo o di minimo locali. Non ci sono punti angolosi o di cuspide.

Valutiamo ora la convessità studiando la derivata seconda, sempre per $x > 0$.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2} \frac{(1-x)^2 + x}{(1-x)^2} + e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(2x-1)(1-x)^2 - (x^2-x+1)2(x-1))}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}\left(x^2 - x + 1 + (2x-1)(x^2-2x+1) - 2(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)\right)$$

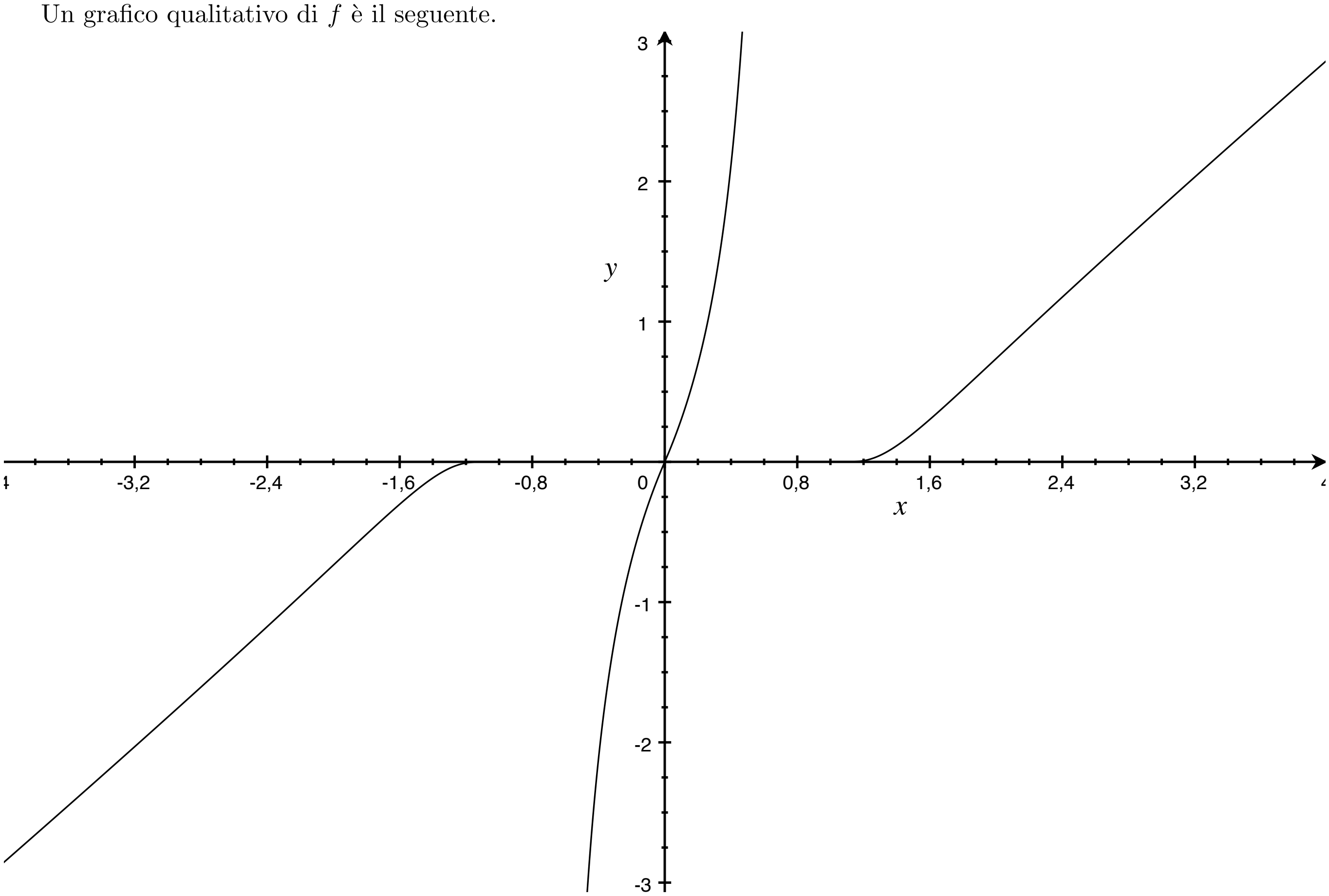
$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}(2-x).$$

Ne segue che f è convessa sull'intervallo $[0, 1)$ e sull'intervallo $(1, 2]$, concava sulla semiretta $[2, +\infty)$. Per simmetria, f è convessa sulla semiretta $(-\infty, -2]$ e concava sugli intervalli $[-2, -1)$ e $(-1, 0]$. I punti $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di flesso. Si noti che nel punto di flesso non esiste la derivata seconda. Infatti, essendo f' continua in $x = 0$ risulta che

$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = 2e$$

mentre $f''_-(0) = -2e$ poiché f' è pari.

Un grafico qualitativo di f è il seguente.



Esercizio 2 Studiare la serie

$$\sum_n \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}(-1)^{(n^2)}$$

detrminandone convergenza e convergenza assoluta.

Soluzione

Osserviamo che n^2 è pari se e solo se n è pari, quindi $(-1)^{(n^2)} = (-1)^n$. La serie diventa quindi

$$\sum_n (-1)^n a_n$$

avendo posto

$$a_n = \frac{e^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Verifichiamo la convergenza assoluta con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{e^n(n!)^2} = \frac{e^{n+1}}{e^n}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = e(n+1)^2\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Risulta quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{4} < 1.$$

Per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente, quindi converge anche semplicemente.

Esercizio 3 Dire se converge l'integrale

$$\int_0^1 t\log t\,dt$$

e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

Soluzione

La funzione integranda non è definita per $t=0$. Dato $M\in(0,1)$ calcoliamo per parti, integrando t e derivando $\log t$

$$\int_M^1 t\log t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\log t\right]_M^1 - \int_M^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log 1 - \frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{2}\int_M^1 t\,dt = -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_M^1$$

$$= -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{4}(1-M^2)$$

Dato che

$$\lim_{M\to0^+} -\frac{M^2}{2}\log M - \frac{1}{4}(1-M^2) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

l'integrale converge e il suo valore è $-\frac{1}{4}$.