Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	primo appello invernale 15 dicembre 2021

1. La funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log(1+x) - \sin(x^2)}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{-(x+2)^2}{8} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) ha un punto di cuspide
(b) è continua a sinistra ma non a destra
▶ (c) ha un punto angoloso
(d) è derivabile

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{2\cos x + \sin(x^2) - 2}{x^5}$

▶ (a) è limitata inferiormente ma non superiormente
(b) non è limitata né superiormente né inferiormente
(c) è limitata superiormente ma non inferiormente
(d) è limitata

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \displaystyle\int_0^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} e^{t^2+1}\, dt =$

▶ (a) e
(b) non esiste
(c) $+\infty$
(d) 0

4. $\displaystyle\int_{-7}^{-6} \frac{1-x}{x+3}\, dx =$

(a) $\dfrac{15}{2} + \log\dfrac{3}{4}$
(b) $\dfrac{49\log 3}{2} - 32\log 4$
▶ (c) $-1 + 4\log 3 - 8\log 2$
(d) $\dfrac{7}{144}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^x - 1)\arctan(x-1)}{x^2}\, dx$

(a) diverge negativamente
▶ (b) non esiste
(c) diverge positivamente
(d) converge

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{\sin x}\, dx$

(a) converge
(b) diverge negativamente
▶ (c) diverge positivamente
(d) non esiste

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log n}} =$

(a) $+\infty$
▶ (b) $\dfrac{1}{e^2}$
(c) 0
(d) $\log 2$

8. La successione $a_n = 5n - \sin(4n) + \cos(n^2)$

(a) non ha limite
▶ (b) è strettamente crescente
(c) converge
(d) ha massimo

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n^2+n}}{n}$

(a) converge assolutamente
▶ (b) diverge positivamente
(c) diverge negativamente
(d) converge semplicemente ma non assolutamente

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + (-1)^n \sin\frac{1}{e^n}\right)$

(a) converge assolutamente
(b) converge ma non converge assolutamente
▶ (c) diverge positivamente
(d) è indeterminata

11. L'insieme di definizione della funzione $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - (y-3)^2}\,\log(y - x)$

► (a) è chiuso

(b) è sia aperto che chiuso

(c) non è né aperto né chiuso

(d) è aperto

12. Sia $f(x,y) = e^{x+y} + x^2 - 2y$. In quale dei seguenti insiemi esiste almeno un punto dove si annulla il gradiente di f?

► (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 25\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq 0\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

Domanda 1: verifichiamo la derivabilità a destra in $x=0$.

$$f(0) = \frac{-(0+2)^2}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{x\log(1+x) - \sin(x^2)}{x^3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{2x\log(1+x) - 2\sin(x^2) + x^3}{2x^3}\right)$$

$$= \frac{2x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2\left(x^2 + o(x^4)\right) + x^3}{2x^4} = \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{x^3} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \cancel{-2x^2} + o(x^4) \cancel{+x^3}}{2x^4} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^4} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad \text{per } x \to 0^+. \rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{3}.$$

Se $x<0$ $f'(x) = \frac{-2(x+2)}{8} = \frac{-x-2}{4}$ f è continua a sinistra in $x=0$

e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-2}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow f'_-(0) = -\frac{1}{2}$

Dall'esistenza di derivata destra e sinistra finite segue la continuità di f in $x=0$. Dato che $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ segue che $x=0$ è un punto angoloso.

Domanda 2: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{2\cos x+\sin(x^2)-2}{x^5}$

per $x\to 0$

$$f(x)=\frac{2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)+\left(x^2+o(x^4)\right)-2}{x^5}=$$

$$=\frac{\cancel{2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{12}+\cancel{o(x^5)}+\cancel{x^2}+o(x^4)\cancel{-2}}{x^5}=\frac{\frac{1}{12}+o(x)}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

$\Rightarrow f$ non è limitata superiormente

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\text{limitata}}{+\infty}=0\ \Rightarrow f \text{ è limitata in un intorno di } +\infty$$

quindi f è limitata inferiormente su $(0,+\infty)$.

Domanda 3 : $\lim_{x\to+\infty} x \int_0^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} e^{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} e^{t^2+1}\,dt}{\frac{1}{x}}$

e il limite è della forma $\frac{0}{0}$. Applichiamo de l'Hôpital e calcoliamo il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)+1}\cdot\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} e^{\sin^2(0)+1}\cdot\cos(0)\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = e\cdot 1 = e.$$

Domanda 4: $\int \frac{1-x}{x+3}\,dx = -\int \frac{x-1}{x+3}\,dx = -\int \frac{x+3-4}{x+3}\,dx =$

$= -\int 1 - \frac{4}{x+3}\,dx = -x + 4\int \frac{dx}{x+3} = -x + 4\log|x+3| + c$

$\Rightarrow \int_{-7}^{-6} \frac{1-x}{x+3}\,dx = \Big[-x + 4\log|x+3|\Big]_{-7}^{-6} = 6 + 4\log|-3| - 7 - 4\log|-4| =$

$= -1 + 4\log 3 - 8\log 2$

Domanda 5: Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x) = \frac{(e^x-1)\,\mathrm{artg}(x-1)}{x^2}$

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = \frac{(\cancel{1}+x+o(x)-\cancel{1})(\mathrm{artg}(-1)+o(1))}{x^2} = \frac{(1+o(1))\left(-\frac{\pi}{4}+o(1)\right)}{x}$

ponendo $g(x) = \frac{1}{x}$ otteniamo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{4}$. Dato che $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$, dal confronto asintotico

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty .$$

per $x \to +\infty$ scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(e^x-1)\,\mathrm{artg}(x-1)}{x^{\cancel{2}}} = +\infty$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

Domanda 6: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{\sin x}\,dx$. Poniamo $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

In $x = 0$ la funzione non è definita ma

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, quindi f è limitata in un intorno di 0,

pertanto integrabile secondo Riemann (f è continua per $x \neq 0, \pi$).

Per $x \to \pi^-$ facciamo il cambiamento di variabile $t = \pi - x$

$\Rightarrow \sin x = \sin(\pi - t) = \cancel{\sin\pi \cos(-t)} + \cos\pi \sin(-t) = \sin t = t + o(t)$

dato che $t \to 0$ se $x \to \pi$

$\Rightarrow \sin(x) = t + o(t) = \pi - x + o(\pi - x)$ per $x \to \pi$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\pi - x + o(\pi - x)} = \frac{\pi + o(1)}{(\pi - x)(1 + o(1))}$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{\pi - x}$ abbiamo che

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pi$. Dato che $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi - x}\,dx = +\infty$

otteniamo che $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = +\infty$.

Domanda 7

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log n}} = e^{\frac{1}{\log n}\log\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\log\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)} = e^{\frac{1}{\log n}\log\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\log\left(\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} = e^{\frac{1}{\log n}\left(\log\frac{1}{n^2}+\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\left(-2\log n+\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} = e^{-2\left(1+\frac{\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\log n}\right)} \longrightarrow e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Domanda 8

$$a_n = 5n - \sin(4n) + \cos(n^2)$$

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - \sin(4(n+1)) + \cos((n+1)^2) - 5n + \sin(4n) - \cos(n^2)$$

$$= 5 - \sin(4n+4) + \cos((n+1)^2) + \sin(4n) - \cos(n^2) \geq 5 - 4 = 1 > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $a_{n+1} > a_n$

e la successione è strettamente crescente.

Domanda 9

Osserviamo che $n^2+n = n(n+1)$ quindi n^2+n è sempre pari.

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n^2+n}}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$ che diverge positivamente.

Domanda 10

osserviamo che

$$\sin\frac{1}{n} + (-1)^n \sin\frac{1}{e^n} \geq \sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{e^n} > 0$$ quindi la serie è

a termini positivi.

Osserviamo anche che

$$e^{\sin n} \geq e^{-1}$$ quindi

$$e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + (-1)^n \sin\frac{1}{e^n}\right) \geq e^{-1}\left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{e^n}\right) = a_n$$

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$. Risulta che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}\left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{e^n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^{2n}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{e^n} + o\left(\frac{n}{e^{2n}}\right)\right) \to \frac{1}{e}.$$

Dato che $\sum \frac{1}{n}$ diverge positivamente, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum e^{-1}\left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{e^n}\right) = +\infty$

Per il criterio del confronto risulta quindi che

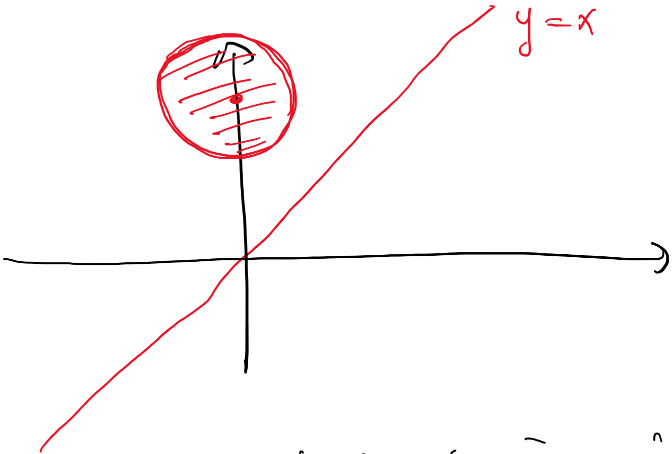
$$\sum e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + (-1)^n \sin\frac{1}{e^n}\right) = +\infty.$$

Domanda 11

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-(y-3)^2}\ \log(y-x).$$

f è definita quando $\begin{cases} 1-x^2-(y-3)^2 \geq 0 \\ y-x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+(y-3)^2 \leq 1 \\ y>x \end{cases}$

la prima disequazione descrive il disco pieno con bordo di centro $(0,3)$ e raggio 1, la seconda il semipiano aperto sopra la bisettrice del 1° quadrante.



L'intersezione dei due insiemi è quindi il disco chiuso $x^2+(y-3)^2 \leq 1$ che è chiuso.

Domanda 12

$$f(x,y) = e^{x+y} + x^2 - 2y.$$

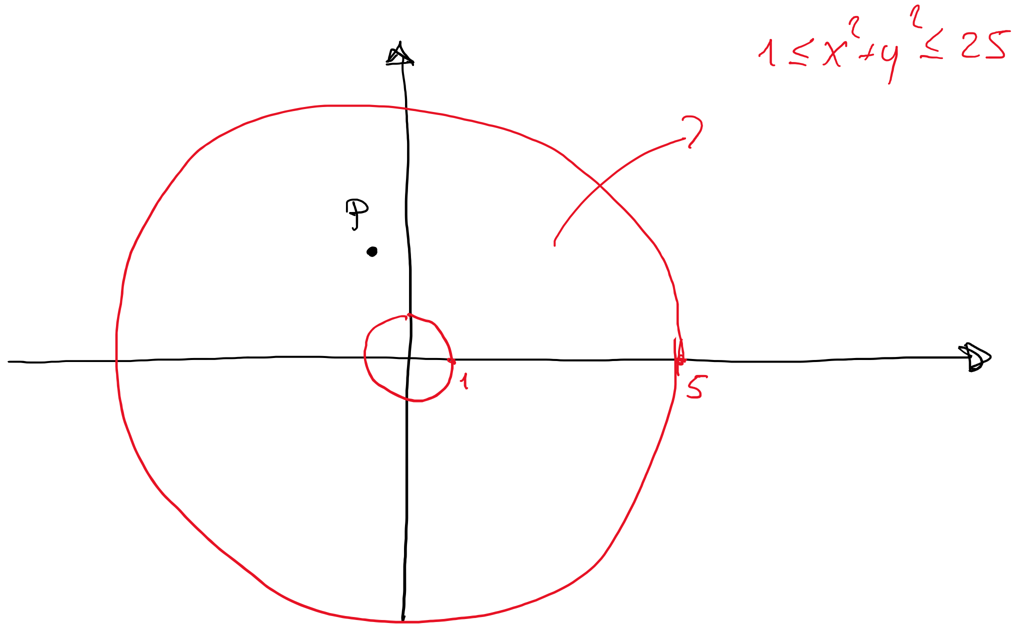
$$f_x = e^{x+y} + 2x \quad , \quad f_y = e^{x+y} - 2$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{x+y} + 2x = 0 \\ e^{x+y} - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad e^{x+y} = 2 \qquad x+y = \log 2$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$e^{\log 2} + 2x = 0 \qquad 2 + 2x = 0 \qquad x = -1 \Rightarrow y = \log 2 - x = \log 2 + 1$$

$$\nabla f = 0 \iff (x,y) = (-1, 1 + \log 2) = P$$



Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 15 dicembre 2021

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x\sqrt[3]{\log|x|}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (oppure estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali, punti angolosi e di cuspide, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita per tutti gli $x \neq 0$ per la presenza del logaritmo, quindi il suo insieme di definizione è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Osserviamo che f è una funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$), quindi è sufficiente lo studio del grafico per $x > 0$ dove la funzione $f(x) = x\sqrt[3]{\log(x)}$. Poiché $x = 0$ non appartiene all'insieme di definizione, l'unico punto $\bar{x} \in D$ tale che $f(\bar{x}) = 0$ è $\bar{x} = 1$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x > 1$ e $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio, considerando f ristretta a $(0, +\infty)$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

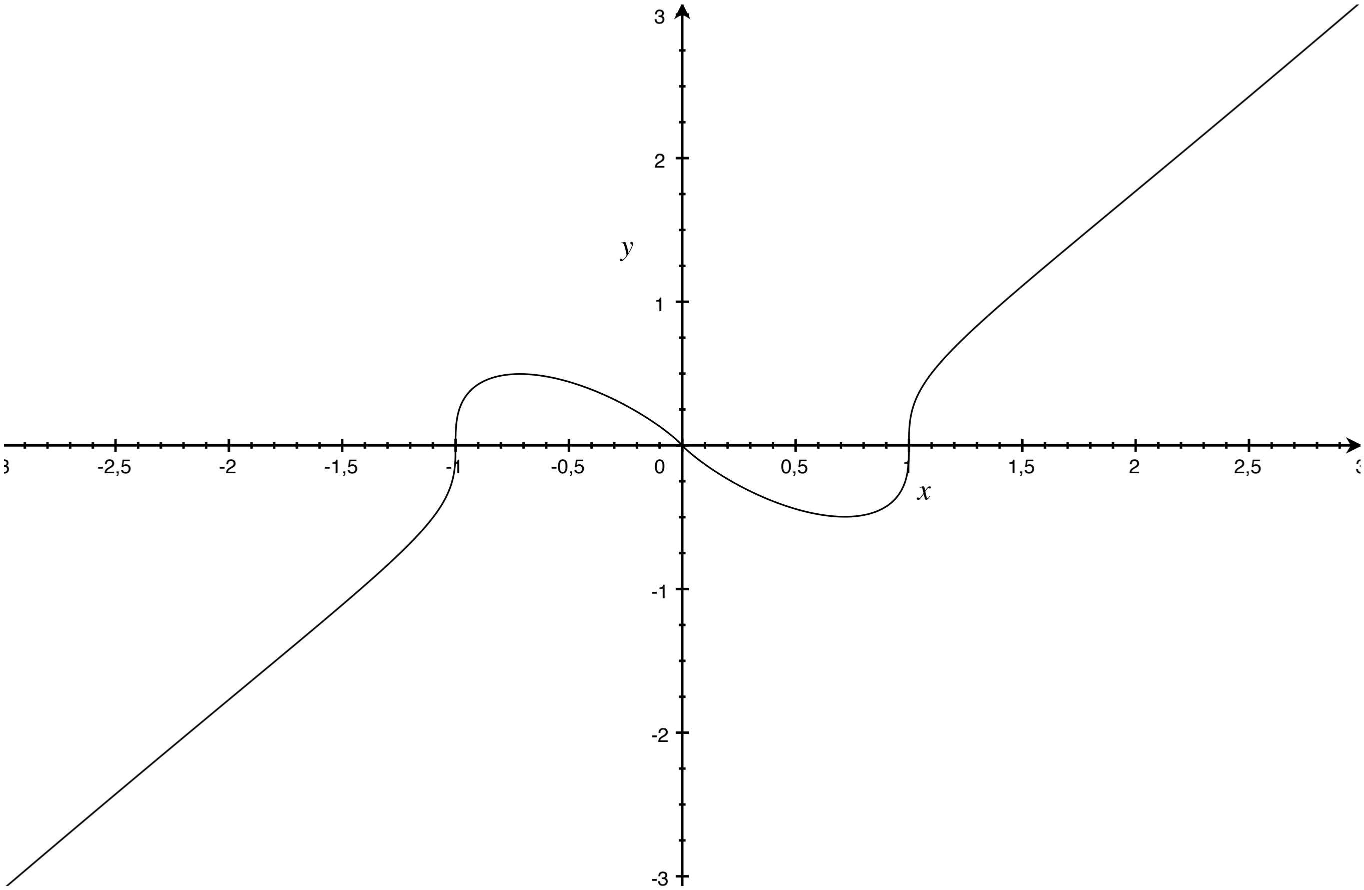
Non esistono quindi asintoti orizzontali, né verticali. Verifichiamo se esiste un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\log(x)} = +\infty$ quindi non può esistere l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Dal calcolo dei limiti, deduciamo che f non è limitata superiormente. Per cercare eventuali punti di minimo e massimo locali calcoliamo la derivata prima e ne studiamo il segno. Abbiamo per $x > 0$ ed $x \neq 1$

$$f'(x) = (\log(x))^{1/3} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(\log(x))^2}} = \frac{3\log(x) + 1}{3\sqrt[3]{(\log(x))^2}}$$

Allora $f'(x) = 0$ per $x = e^{-1/3}$. Poiché il denominatore di $f'(x)$ è sempre positivo, il segno della derivata prima dipende dal segno del numeratore. Quindi $f'(x) > 0$ per $e^{-1/3} < x < 1$ e $x > 1$ mentre $f'(x) < 0$ per $0 < x < e^{-1/3}$. Il punto $x = e^{-1/3}$ è un punto di minimo locale, non esistono punti di massimo locale per $x > 0$. Per $x \to 0$, $f'(x) \to -\infty$; per $x \to 1$, $f'(x) \to +\infty$. Il grafico di f ha tangente verticale in $x = 1$. Per simmetria della funzione avremo che $x = -e^{-1/3}$ è un punto di massimo locale e non esistono punti di minimo locale per $x < 0$, $x = -1$ è un punto a tangente verticale. Inoltre, sempre utilizzando il fatto che f è una funzione dispari, possiamo affermare che f non è inferiormente limitata ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$). Studiamo poi la derivata seconda. Si ha per $x > 0$, $x \neq 1$

$$f''(x) = \frac{3\log(x) - 2}{9x\sqrt[3]{(\log(x))^5}}.$$

Essa si annulla, ovvero $f''(x) = 0$, per $x = e^{2/3}$. Per $0 < x < 1$ il denominatore di f'' è negativo ed anche il numeratore lo è, quindi f è convessa per $x \in (0, 1)$. Se invece $1 < x < e^{2/3}$, il numeratore di f'' continua ad essere negativo, ma il denominatore è positivo, quindi sull'intervallo $(1, e^{2/3})$ f risulta concava; infine per $x > e^{2/3}$ la derivata seconda è sempre positiva e la funzione f è convessa. Il punto $x = e^{2/3}$ è un punto di flesso. Il punto $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale. Un grafico qualitativo di f è il seguente.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{(\log x)^3}{x\,(1-(\log x)^2)}\,dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima una primitiva. Con la sostituzione

$$t = \log x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dx}{x} = dt$$

otteniamo

$$\int \frac{(\log x)^3}{x\,(1-(\log x)^2)}\,dx = \int \frac{t^3}{1-t^2}\,dt = \int \frac{t^3-t+t}{1-t^2}\,dt = \int \frac{t(t^2-1)}{1-t^2}\,dt + \int \frac{t}{1-t^2}\,dt = \int -t\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2}\,dt$$

$$= -\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log|1-t^2| + c = -\frac{\log^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log|1-\log^2 x| - c.$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo che

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{(\log x)^3}{x\,(1-(\log x)^2)}\,dx = \left[-\frac{\log^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log|1-\log^2 x|\right]_{e^2}^{e^3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log^2(e^3) + \log\left|1-\log^2(e^3)\right| - \log^2(e^2) - \log\left|1-\log^2(e^2)\right|\right) = -\frac{1}{2}\left(9+\log 8 - 4 - \log 3\right) = -\frac{1}{2}\left(5+\log\frac{8}{3}\right).$$

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$a_n = (-1)^n \left(e^{1/n^3} - 1\right) n^2.$$

Dire inoltre se la successione ha massimo o minimo.

Soluzione

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale

$$e^t = 1 + t + o(t), \qquad t \to 0$$

con la sostituzione $t = \frac{1}{n^3}$ che è lecita dato che $t \to 0$ se $n \to +\infty$. Otteniamo quindi che

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1\right) n^2 = (-1)^n \left(1 + o(1)\right) \frac{1}{n}.$$

Poichè la quantità $(-1)^n$ è limitata, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Osserviamo ora che, per $e^{\frac{1}{n^3}} > 1$, per ogni $n \geq 1$, quindi la successione assume sia valori positivi che negativi. Per il teorema di Weierstrass generalizzato (nella versione per successioni) abbiamo allora che la successione ha sia massimo che minimo.