

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	Secondo appello invernale 04 febbraio 2020
---------------------------------------	---------------------------	---

1. Se $[x]$ indica la parte intera di x allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + [x])}{x} =$
- (a) 0 (b) $-\infty$ (c) 1 (d) non esiste
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(3x) dx =$
- (a) $-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$ (b) 0 (c) $-\frac{\pi^2}{24}$ (d) $-\frac{\pi}{2} - 1$
3. La successione $a_n = e^n (\log(e^n + 1) - \log(e^n - 1))$, definita per $n \geq 1$,
- (a) è limitata superiormente (b) non è limitata inferiormente
(c) non ha limite ma è limitata (d) non ha né massimo né minimo
4. L'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{-3y}{x} + 1 \\ y(-2) = -\frac{7}{8} \end{cases}$ è
- (a) $(-\infty, -2]$ (b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) \mathbb{R} ► (d) $(-\infty, 0)$
5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x \sin x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ in $x = 0$
- (a) ha retta tangente verticale (b) ha un punto di cuspidè
(c) è derivabile ► (d) ha un punto angoloso
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$
- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $+\infty$ ► (c) 2 (d) $-\infty$
7. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^5 - 3)e^{1-x^3}$
- (a) non ha né massimo né minimo (b) è limitata inferiormente ma non ha minimo
► (c) ha massimo ma non ha minimo (d) ha sia massimo che minimo
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2)^{\frac{1}{n^2}} =$
- (a) 1 (b) $\frac{1}{e}$ (c) $+\infty$ (d) e^2
9. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$ Allora $y''(1) =$
- (a) 0 ► (b) $\frac{8}{e^4}$ (c) $-\frac{24}{e^4}$ (d) $\frac{1}{e^4}$
10. $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx =$
- (a) $\log \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}(\log 3 - \log 2)$ (c) 0 (d) $\frac{\pi}{4}$

Versione n. 44961

1. a
2. a
3. a
4. d
5. d
6. c
7. c
8. a
9. b
10. a

Versione n. 47061

1. d
2. d
3. c
4. b
5. c
6. b
7. c
8. a
9. a
10. b

Versione n. 49162

1. b
2. b
3. d
4. b
5. c
6. a
7. b
8. c
9. a
10. b

Versione n. 51263

1. c
2. a
3. c
4. d
5. a
6. a
7. c
8. d
9. c
10. b

Versione n. 53364

1. d
2. d
3. d
4. a
5. a
6. a
7. a
8. c
9. b
10. a

Versione n. 55465

1. a
2. d
3. a
4. a
5. a
6. a
7. c
8. b
9. b
10. b

Analisi Matematica

Pisa, 4 febbraio 2020 - Programma precedente

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = |x^3 - x^2| + \frac{5x}{12}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (oppure estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali, punti angolosi e di cuspidi, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre è continua ovunque, essendo composizione e somma di funzioni continue. Esplicitiamo ora il valore assoluto osservando che

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + \frac{5x}{12} & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - x^3 + \frac{5x}{12} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Ricordando che il valore assoluto è una funzione derivabile se in suo argomento è diverso da 0, otteniamo che la funzione f è derivabile in ogni punto $x \neq 1$ in quanto composizione e somma di funzioni derivabili. Esaminiamo ora il punto $x = 1$. Derivando per $x \neq 1$ abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + \frac{5}{12} & \text{se } x > 1 \\ 2x - 3x^2 + \frac{5}{12} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Dato che la funzione è continua in $x = 1$ possiamo provare a calcolare la derivata destra e sinistra eseguendo i limiti della derivata:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - 3x^2 + \frac{5}{12} = 2 - 3 + \frac{5}{12} = \frac{-12 + 5}{12} = -\frac{7}{12},$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 - 2x + \frac{5}{12} = 3 - 2 + \frac{5}{12} = \frac{12 + 5}{12} = \frac{17}{12}.$$

Da questo risultato deduciamo che per $x = 1$ abbiamo un punto angoloso. La funzione è quindi derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calcoliamo ora i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x^3 + \frac{5x}{12} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 + \frac{5x}{12} = +\infty.$$

La funzione quindi non è limitata superiormente e, per il teorema di Weierstrass generalizzato, ha minimo. Non ci sono asintoti orizzontali e neanche verticali, dato che f è continua in tutto \mathbb{R} . Vediamo ora se ci sono asintoti obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3 + \frac{5x}{12}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x^2 + \frac{5}{12} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + \frac{5x}{12}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + \frac{5}{12} = +\infty.$$

Non ci sono quindi neanche asintoti obliqui. Cerchiamo ora i punti di massimo e di minimo locali studiando il segno della derivata. Se $x > 1$ avremo che

$$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 2x + \frac{5}{12} > 0.$$

Dato che il discriminante del polinomio $3x^2 - 2x + \frac{5}{12}$ è uguale a $4 - 12 \frac{5}{12} = -1 < 0$, non ci sono radici reali e il polinomio è sempre positivo. Quindi avremo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 1$.
 Nel caso $x < 1$ invece

$$-3x^2 + 2x + \frac{5}{12} = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12 \cdot \frac{5}{12}}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{-6} \iff x = -\frac{1}{6} \text{ oppure } x = \frac{5}{6}.$$

Ne segue che

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < -\frac{1}{6}, \quad f'(x) > 0 \text{ se } -\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } \frac{5}{6} < x < 1.$$

Riunendo tutti i risultati otteniamo che f è strettamente decrescente in $(-\infty, -\frac{1}{6}]$, strettamente crescente in $[-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$, strettamente decrescente in $[\frac{5}{6}, 1]$ e strettamente crescente in $[1, +\infty)$. I punti di ascissa $x = -\frac{1}{6}$ e $x = 1$ sono di minimo locale mentre il punto di ascissa $x = \frac{5}{6}$ è di massimo locale. Per determinare il minimo della funzione valutiamola nei punti di minimo locale:

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \frac{5}{12 \cdot 6} = \frac{1}{36} - \frac{1}{36 \cdot 6} - \frac{5}{36 \cdot 2} = \frac{6 - 1 - 15}{36 \cdot 6} = -\frac{10}{216},$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + \frac{5}{12} = \frac{5}{12}.$$

Il minimo della funzione vale quindi $-\frac{10}{216}$.

Vediamo infine la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 - 6x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Dato che

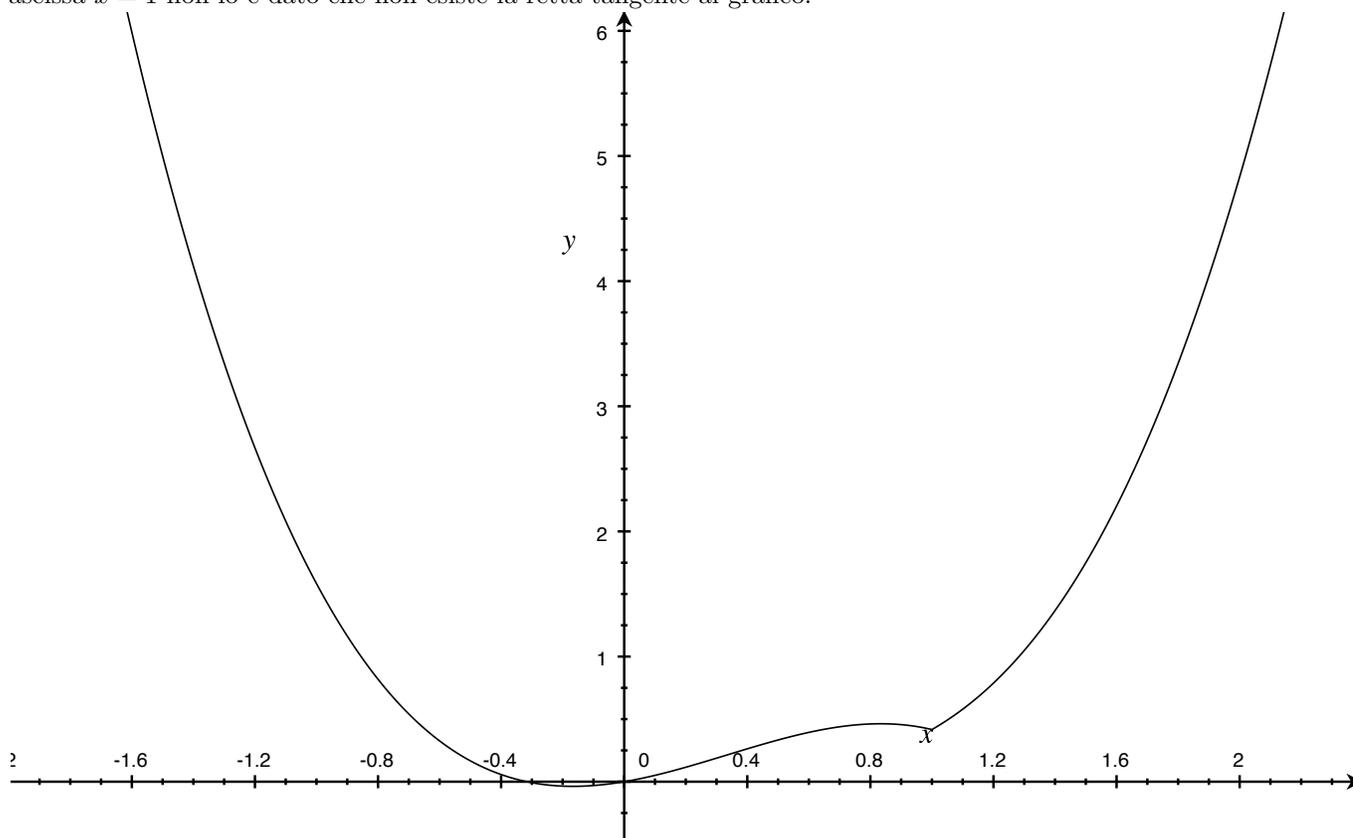
$$6x - 2 > 0 \iff x > \frac{1}{3},$$

$$2 - 6x > 0 \iff x < \frac{1}{3}$$

e considerando la diversa espressione della derivata seconda nelle due semirette, otteniamo che

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < \frac{1}{3}, \quad f''(x) < 0 \text{ se } \frac{1}{3} < x < 1, \quad f''(x) > 0 \text{ se } x > 1.$$

Nel punto $x = 1$ la derivata seconda non esiste, dato che non esiste neanche la derivata prima. La funzione è quindi convessa in $(-\infty, \frac{1}{3}]$, concava in $[\frac{1}{3}, 1]$ e convessa in $[1, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$ è di flesso mentre il punto di ascissa $x = 1$ non lo è dato che non esiste la retta tangente al grafico.



Esercizio 2 Trovare massimo e minimo della funzione

$$F(x) = \int_{-1}^x (t-1) \arctan t \, dt$$

sull'intervallo $[-1, 1]$.

Soluzione

La funzione è derivabile su tutto l'intervallo $[-1, 1]$ essendo la primitiva di una funzione continua. Per il teorema di Weierstrass F ha massimo e minimo in $[-1, 1]$. Determiniamoli valutando la monotonia della funzione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta

$$F'(x) = (x-1) \arctan x.$$

Dato che

$$x-1 > 0 \iff x > 1, \quad \arctan x > 0 \iff x > 0,$$

avremo che

$$F'(x) > 0 \text{ se } x < 0, \quad F'(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1.$$

Risulta quindi che F è strettamente crescente in $[-1, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, 1]$. La funzione F assumerà quindi il massimo nel punto di ascissa $x = 0$. Per il minimo dovremo confrontare il valore assunto da F nei punti di ascissa $x = -1$ e $x = 1$. Determiniamo una primitiva di F . Integriamo per parti derivando $\arctan t$ e integrando $t-1$:

$$\int (t-1) \arctan t \, dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \arctan t - \int \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \frac{1}{t^2+1} \, dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 2t}{t^2+1} \, dt.$$

Calcoliamo il secondo integrale utilizzando il fatto che

$$\frac{t^2 - 2t}{t^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} + \frac{-1 - 2t}{t^2 + 1} = 1 - \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int (t-1) \arctan t \, dt &= \left(\frac{t^2}{2} - t\right) \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 1} \, dt = \frac{t^2 - 2t}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{2t}{t^2 + 1}\right) dt \\ &= \frac{t^2 - 2t}{2} \arctan t - \frac{1}{2} (t - \arctan t - \log(1 + t^2)) + c = \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + t^2) + c. \end{aligned}$$

Avremo allora che

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x (t-1) \arctan t \, dt = \left[\frac{t^2 - 2t + 1}{2} \arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + t^2) \right]_{-1}^x \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + x^2) - \left(\frac{1 + 2 + 1}{2} \arctan(-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + 1) \right) \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Valutiamo ora la funzione nei 3 punti:

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} (t-1) \arctan t \, dt = 0,$$

$$F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2,$$

$$F(1) = 0 \cdot \arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

Dato che

$$\frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

abbiamo che il minimo della funzione è assunto nel punto $x = -1$ e vale 0. Il massimo vale invece $F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xe^{x^2-y} \\ y(0) = -\log 2. \end{cases}$$

Determinare poi il minimo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xe^{x^2-y} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili. Avremo quindi

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x^2} e^{-y} \iff \frac{dy}{dx} e^y = xe^{x^2}$$

e, integrando

$$\int e^y dy = \int xe^{x^2} dx + c.$$

Quindi

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Determiniamo ora la costante c imponendo la condizione iniziale $y(0) = -\log 2$, ottenendo

$$e^{-\log 2} = \frac{1}{2}e^0 + c \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \iff c = 0.$$

La soluzione è quindi

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} \iff y = \log\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) = \log\frac{1}{2} + \log(e^{x^2}) = x^2 - \log 2.$$

Risolviamo ora il problema parametrico.

Osserviamo che la soluzione esiste sicuramente in un intorno del punto iniziale $x = 0$. Studiamo la monotonia della soluzione valutando il segno della derivata.

$$y' = xe^{x^2-y} > 0 \iff x > 0$$

quindi avremo che la soluzione è strettamente decrescente se $x < 0$ e strettamente crescente se $x > 0$. Ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per la soluzione. Dato che $y(0) = \alpha$ otteniamo che il minimo della soluzione vale α . In alternativa potevamo risolvere esplicitamente il problema di Cauchy.

L'equazione differenziale è la stessa del problema precedente, quindi la soluzione generale è sempre data da

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \alpha$ otteniamo

$$e^\alpha = \frac{1}{2}e^0 + c \iff c = e^\alpha - \frac{1}{2}.$$

Allora la soluzione risolve l'equazione

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^\alpha - \frac{1}{2}$$

quindi

$$y = \log\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + e^\alpha - \frac{1}{2}\right).$$

La soluzione è pari e crescente per $x > 0$, dato che è composizione di funzioni crescenti. Ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto e che $y(0) = \alpha$ è il minimo.