

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	Primo appello invernale 14 gennaio 2020
--------------------------------	--------------------	--

1. $\int_{e^2}^{e^e} \frac{dx}{x \log x (\log \log x)^2} =$

- (a) $\frac{1}{e^{1+e}} - \frac{e^{-2}}{2(\log 2)^2}$ (b) $\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^e}$ (c) $e^2 - 4$ ► (d) $\frac{1}{\log 2} - 1$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$

- (a) 0 (b) ∞ (c) 1 ► (d) $\frac{1}{e}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} =$

- (a) $\frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) 0 (d) $+\infty$

4. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y \arctan x + e^{2x \arctan x} \\ y(1) = e. \end{cases}$ Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) =$

- (a) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ► (b) $+\infty$ (c) 0 (d) $\frac{2e}{3}$

5. Se $f(x) = x^{(e^x)}$ allora $f'(x) =$

- (a) $x^{(e^x)} e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$ (b) $x^{(e^x-1)}$ (c) $x^{(e^x)} + x^{(e^x-1)} e^x$ (d) $e^{2e^x \log x} + e^{e^x \log x + x} x$

6. La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x^2}^1 e^{t^3} - 1 dt$

- (a) ha massimo (b) ha minimo
(c) è strettamente crescente (d) è debolmente decrescete

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\frac{x^3}{y^3} \\ y(1) = 4. \end{cases}$ Allora $y(4) =$

- (a) $\frac{17}{4}$ ► (b) 1 (c) -2 (d) $\sqrt[4]{17}$

8. La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\log x}{3 + e^x}$

- (a) è bigettiva (b) è iniettiva ma non surgettiva
► (c) non è né iniettiva né surgettiva (d) è surgettiva ma non iniettiva

9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n n!}{(2n)^n} =$

- (a) $\frac{3}{2e}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $+\infty$ ► (d) 0

10. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 2x^4 > -1\}$

- (a) è limitato (b) è limitato inferiormente ma non superiormente
(c) non è limitato né superiormente né inferiormente (d) è limitato superiormente ma non inferiormente

Versione n. 81934

1. d
2. d
3. a
4. b
5. a
6. a
7. b
8. c
9. d
10. a

Versione n. 84035

1. c
2. a
3. c
4. b
5. b
6. a
7. d
8. a
9. b
10. b

Versione n. 86136

1. a
2. d
3. c
4. c
5. b
6. a
7. d
8. a
9. d
10. b

Versione n. 88237

1. c
2. b
3. b
4. c
5. b
6. d
7. a
8. c
9. a
10. b

Versione n. 90338

1. c
2. a
3. b
4. d
5. d
6. c
7. c
8. c
9. a
10. a

Versione n. 92439

1. d
2. b
3. a
4. a
5. d
6. b
7. c
8. b
9. b
10. b

Analisi Matematica

Pisa, 14 gennaio 2020

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (|x + 1| - |x - 1|) \log |x|.$$

- **(6 punti)** Determinare insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui) estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali, intervalli di convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.
- **(4 punti)** Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di 0, quindi per $x \neq 0$. Osserviamo inoltre che

$$f(-x) = (|-x + 1| - |-x - 1|) \log |-x| = (|x - 1| - |x + 1|) \log |x| = -f(x)$$

quindi la funzione è dispari e la studieremo per $x > 0$. In questo caso la funzione diventa

$$f(x) = (x + 1 - |x - 1|) \log x.$$

Dato che

$$|x - 1| = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

otteniamo che

$$f(x) = \begin{cases} 2x \log x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 \log x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Vediamo ora i limiti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \log x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \log x = +\infty. \end{aligned}$$

Da questo risultato abbiamo che

$$\sup(f) = +\infty$$

e, per simmetria,

$$\inf(f) = -\infty.$$

La funzione non ha quindi né massimo né minimo. Non ci sono asintoti verticali o orizzontali. Controlliamo quelli obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{x} = 0$$

quindi non ci sono neanche asintoti obliqui. La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione perchè composizione, somma e prodotto di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità vale lo stesso discorso, a parte il punto $x = 1$ dove si annulla il valore assoluto. Controlliamo separatamente questo punto.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x \log x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2(1+t) \log(1+t)}{t} = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \log x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \log(1+t)}{t} = 2.$$

La funzione è quindi derivabile anche per $x = 1$ e $f'(1) = 2$.

Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \log x + 2x \frac{1}{x} = 2 \log x + 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Risulta immediato che $f'(x) > 0$ se $x \geq 1$. Se invece $0 < x < 1$ abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff 2 \log x + 2 > 0 \iff \log x > -1 \iff x > \frac{1}{e}.$$

La funzione sarà quindi strettamente decrescente se $x \in (0, \frac{1}{e}]$ e strettamente crescente se $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = \frac{1}{e}$ è di minimo locale. Per simmetria, la funzione è strettamente crescente in $(\infty, -\frac{1}{e}]$, strettamente decrescente in $[-\frac{1}{e}, 0)$ e il punto di ascissa $x = -\frac{1}{e}$ è di massimo locale.

Calcoliamo ora la derivata seconda per l'analisi della convessità.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Lo studio del segno è immediato

$$x \in (0, 1) \implies f''(x) > 0, \quad x \in (1, +\infty) \implies f''(x) < 0.$$

La funzione è quindi strettamente convessa in $(0, 1]$ e strettamente concava in $[1, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 1$ è di flesso perché la funzione è derivabile e cambia convessità. Osserviamo anche che, pur essendo un punto di flesso, nel punto $x = 1$ la funzione non è derivabile 2 volte dato che $f''_-(1) = 2$ mentre $f''_+(1) = -2$. Per simmetria otteniamo che f è strettamente convessa in $(-\infty, -1]$, strettamente concava in $(-1, 0)$ e il punto di ascissa $x = -1$ è di flesso.

Esaminiamo ora l'equazione

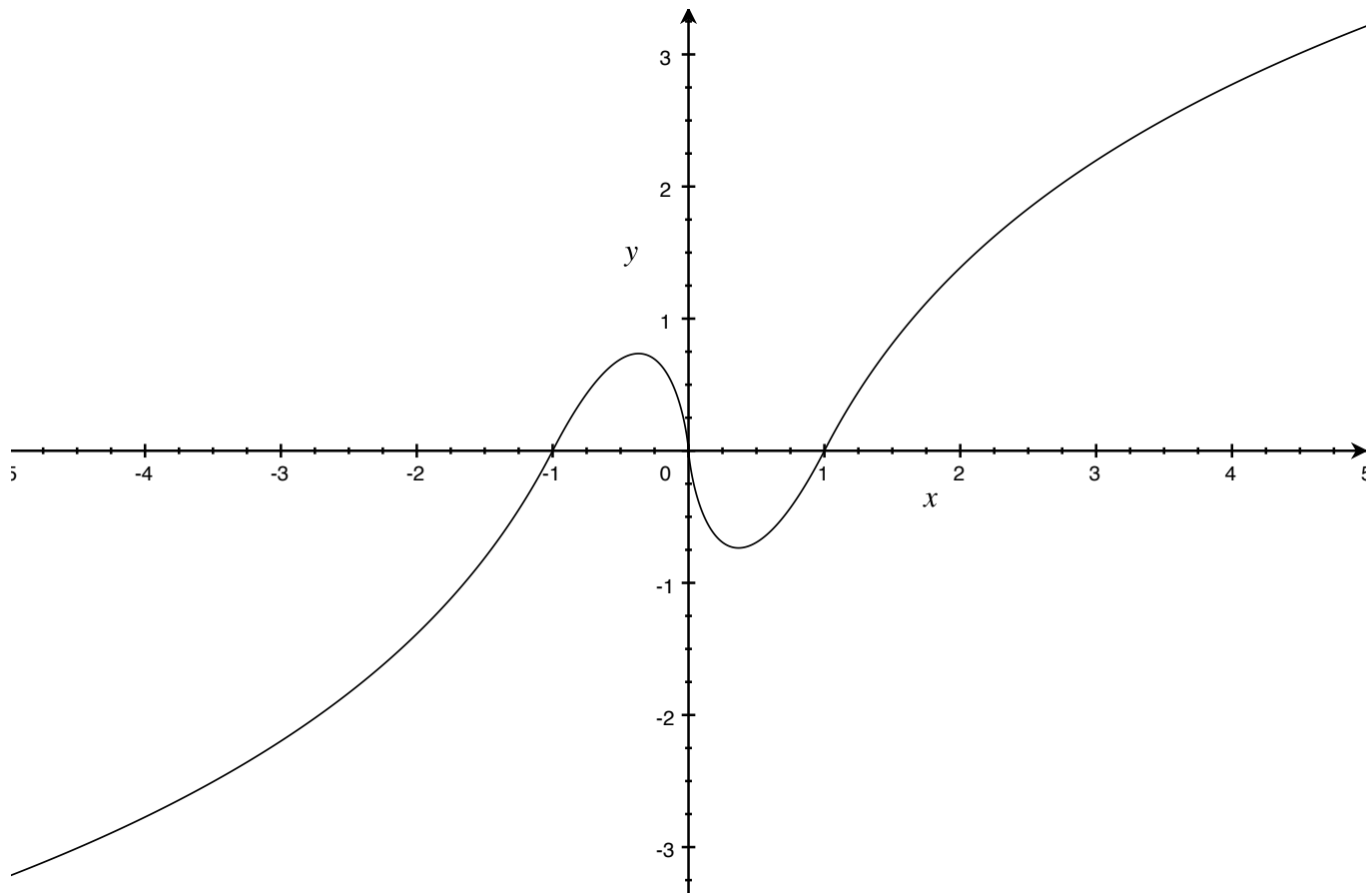
$$f(x) = a.$$

Per determinare il numero di soluzioni dobbiamo valutare il valore della funzione nei punti di massimo e di minimo locali.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \frac{1}{e} \log \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}, \quad f\left(-\frac{1}{e}\right) = -f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

Ne segue che l'equazione ha

- 1 soluzione se $a < -\frac{2}{e}$
- 2 soluzioni se $a = -\frac{2}{e}$
- 3 soluzioni se $-\frac{2}{e} < a < 0$
- 2 soluzioni se $a = 0$
- 3 soluzioni se $0 < a < \frac{2}{e}$
- 2 soluzioni se $a = \frac{2}{e}$
- 1 soluzione se $a > \frac{2}{e}$.



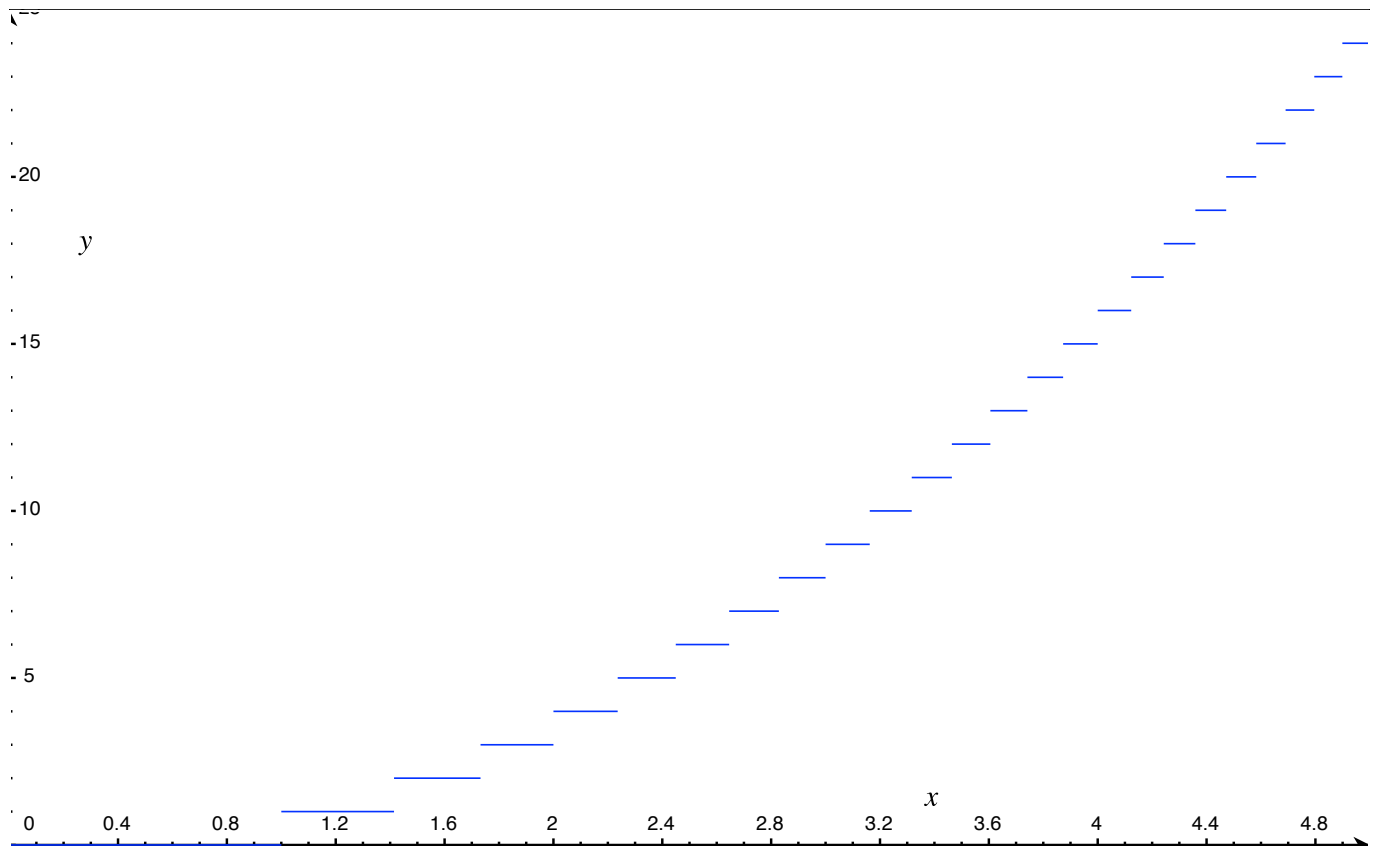
Esercizio 2

- (4 punti) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = [x^2]$ per $x \geq 0$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera.
- (4 punti) Calcolare l'intergrale

$$\int_0^2 [x]^2 - [x^2] dx.$$

Soluzione

La funzione $f(x) = [x^2]$ è costante a tratti ed ha infiniti punti di discontinuità in corrispondenza dei valori interi della funzione x^2 . Il grafico è il seguente



Avremo quindi che

$$[x^2] = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{se } \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{se } \sqrt{3} \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Analogamente

$$[x]^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Per calcolare l'integrale dividiamo il dominio di integrazione:

$$\int_0^2 [x]^2 - [x^2] dx = \int_0^1 0 - 0 dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 - 1 dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1 - 2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 1 - 3 dx = -1(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 4.$$

Esercizio 3

- (4 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (2 punti) Determinare per quali valori di α la soluzione ha minimo o massimo sulla semiretta $[0, +\infty)$.

- (4 punti) Trovare i valori di α per i quali il problema

$$\begin{cases} y'' - \alpha y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non identicamente nulle.

Soluzione

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - \alpha.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono

$$\begin{aligned} &-\sqrt{\alpha}, \quad \sqrt{\alpha} \quad \text{se } \alpha \geq 0 \\ &-i\sqrt{-\alpha}, \quad i\sqrt{-\alpha}, \quad \text{se } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Distinguiamo tre casi:

1. $\alpha > 0$,
2. $\alpha = 0$,
3. $\alpha < 0$.

Nel caso 1. la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{\sqrt{\alpha}x}$$

quindi

$$y'(x) = -\sqrt{\alpha}c_1 e^{-\sqrt{\alpha}x} + \sqrt{\alpha}c_2 e^{\sqrt{\alpha}x}.$$

Ne segue che

$$y(0) = c_1 + c_2, \quad y'(0) = -\sqrt{\alpha}c_1 + \sqrt{\alpha}c_2$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\sqrt{\alpha}c_1 + \sqrt{\alpha}c_2 = 2 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\sqrt{\alpha}x}.$$

Nel caso 2. abbiamo la radice doppia $\alpha = 0$ quindi la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2x.$$

Derivando abbiamo

$$y'(x) = c_2$$

quindi

$$y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2$$

e, dalle condizioni iniziali

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = 2x.$$

Osserviamo che la soluzione si poteva ottenere anche integrando due volte l'equazione $y'' = 0$ utilizzando le condizioni iniziali.

Nel caso 3. la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\alpha}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}x)$$

quindi

$$y'(x) = -c_1 \sqrt{-\alpha} \sin(\sqrt{-\alpha}x) + c_2 \sqrt{-\alpha} \cos(\sqrt{-\alpha}x).$$

Nel punto iniziale risulta

$$y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \sqrt{-\alpha}.$$

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \sin(\sqrt{-\alpha}x).$$

Per stabilire l'esistenza del massimo o del minimo sulla semiretta $[0, +\infty)$ calcoliamo il limite per x che tende a $+\infty$ nei tre casi. Nel primo caso

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\sqrt{\alpha}x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\sqrt{\alpha}x} = +\infty$$

quindi la funzione non ha massimo ma ha minimo (per il teorema di Weierstrass generalizzato, dato che è continua sulla semiretta chiusa $[0, +\infty)$). In modo analogo, nel secondo caso

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

non c'è il massimo ma c'è il minimo. Nell'ultimo caso la funzione $y(x) = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \sin(\sqrt{-\alpha}x)$ ha sia massimo che minimo. Risolviamo ora il secondo problema, imponendo le condizioni

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Nel primo caso abbiamo

$$y(0) = c_1 + c_2, \quad y(\pi) = c_1 e^{-\sqrt{\alpha}\pi} + c_2 e^{\sqrt{\alpha}\pi}$$

quindi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{-\sqrt{\alpha}\pi} + c_2 e^{\sqrt{\alpha}\pi} = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $c_1 = c_2 = 0$ che corrisponde alla soluzione identicamente nulla. Nel secondo caso $y(x) = c_1 + c_2 x$ quindi

$$y(0) = c_1, \quad y(\pi) = c_1 + c_2 \pi.$$

Allora deve essere

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases}$$

e anche in questo caso abbiamo $c_1 = c_2 = 0$, quindi la soluzione identicamente nulla.

Nel terzo caso

$$y(0) = c_1, \quad y(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{-\alpha}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}\pi).$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{-\alpha}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0 \end{cases}$$

quindi deve essere

$$c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$$

che ha come possibili soluzioni $c_2 = 0$ oppure $\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$. Se $c_2 = 0$ abbiamo la soluzione identicamente nulla, quindi l'unica possibilità è che sia

$$\sin(\sqrt{-\alpha}\pi) = 0$$

e questo corrisponde a valori interi di $\sqrt{-\alpha}$. Quindi deve essere

$$\sqrt{-\alpha} = n \in \mathbb{Z} \iff -\alpha = n^2$$

cioè α deve essere l'opposto del quadrato di un numero intero non nullo.