Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 2 settembre 2019

Domanda 1 $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x^3}+x^2}{e^{x^2}+x^3} =$

A) $+\infty$ B) 0
C) $-\infty$ D) 1

B

Domanda 2 La funzione $f(x) = \dfrac{1}{e^x + x}$

A) non ha asintoti B) ha un asintoto orizzontale e nessun asintoto verticale
C) ha un asintoto verticale e uno orizzontale D) ha un asintoto verticale e nessun asintoto orizzontale

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-1)\arctan(x+1)$

A) è debolmente crescente B) è limitata superiormente
C) è strettamente decrescente D) ha minimo

D

Domanda 4 $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(1+n)-n}{n^2} =$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) 0 C) $+\infty$ D) $-\infty$

B

Domanda 5 $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!e^{n\log n}}{(2n)!} =$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{e}{4}$ C) 1 D) 0

D

Domanda 6 $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{x^5} \displaystyle\int_0^x 1-\cos(t^2)\,dt =$

A) $+\infty$ B) 0 C) $\dfrac{1}{10}$ D) $\dfrac{2}{5}$

C

Domanda 7 $\displaystyle\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan x\,dx =$

A) $\log\left(\sqrt{2}\right) - \log\left(\sqrt{3}\right)$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{\log 3 - \log 2}{2}$ D) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

C

Domanda 8 $\lim_{x\to-\infty} \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} e^{t+1}\,dt =$

A) 0 B) e C) $-\infty$ D) 1

B

Domanda 9 Siano $y(x)$ e $z(x)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy $\begin{cases} y' = x^2e^{-y} \\ y(0) = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} z' = x^2e^{-z} \\ z(0) = 5. \end{cases}$ Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) - z(x) =$

A) 2 B) 0 C) $\log 2$ D) $+\infty$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = x^3 + 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3. \end{cases}$ Allora risulta $y(1) =$

A) $-\dfrac{157}{60}$ B) $-\dfrac{97}{60}$ C) -1 D) $\dfrac{23}{60}$

B

codice 993285

Analisi Matematica

Pisa, 2 settembre 2019

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log(x+1) - \arctan\sqrt{x}$, determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), eventuali punti angolosi o di cuspide, punti di massimo o di minimo locali e stabilire il numero di punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > -1$ per dare senso al logaritmo e per $x \geq 0$ per via della radice quadrata, quindi f è definita sulla semiretta $[0, +\infty)$. Vediamo ora il limite a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x+1) - \arctan\sqrt{x} = \log(+\infty) - \arctan +\infty = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Da questo risultato segue che non c'è l'asintoto orizzontale e che

$$\sup(f) = +\infty.$$

Vediamo ora se c'è l'asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{x} - \frac{\arctan\sqrt{x}}{x} = 0$$

per ordine di infinito e perché la funzione arcotangente è limitata. Quindi non c'è neanche l'asintoto obliquo.

Studiamo ora la monotonia attraverso la derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

Dato che la funzione è continua (a destra) in $x = 0$, possiamo tentare di calcolare la derivata (destra) in 0 facendo il limite della derivata, ottenendo

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto di cuspide (destra). Per quanto riguarda il segno della derivata, dato che il denominatore è sempre positivo per $x > 0$, avremo che

$$f'(x) > 0 \iff 2\sqrt{x} - 1 > 0 \iff 2\sqrt{x} > 1 \iff \sqrt{x} > \frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{4}.$$

Quindi la funzione sarà strettamente decrescente sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{1}{4}$ è punto di minimo assoluto (quindi anche relativo). Il minimo della funzione è

$$\min(f) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\frac{1}{2}.$$

Osserviamo anche che tale minimo è sicuramente negativo, dato che la funzione è strettamente decrescente per $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Per la stessa ragione, il punto di ascissa $x = 0$ è di massimo locale.

Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda. Prima di tutto conviene scrivere la derivata prima nel seguente modo:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}.$$

Avremo allora che

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) - (2x^{\frac{1}{2}} - 1)(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{1}{2}\frac{x + 1 - 3x - 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{-2x + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$= \frac{-4x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1}{4(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^2 x^{\frac{1}{2}}}.$$

Dato che il denominatore è positivo per ogni $x > 0$ basterà determinare il segno del numeratore. Poniamo quindi

$$g(x) = -4x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$$

e osserviamo che

$$g(0) = 1 > 0, \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

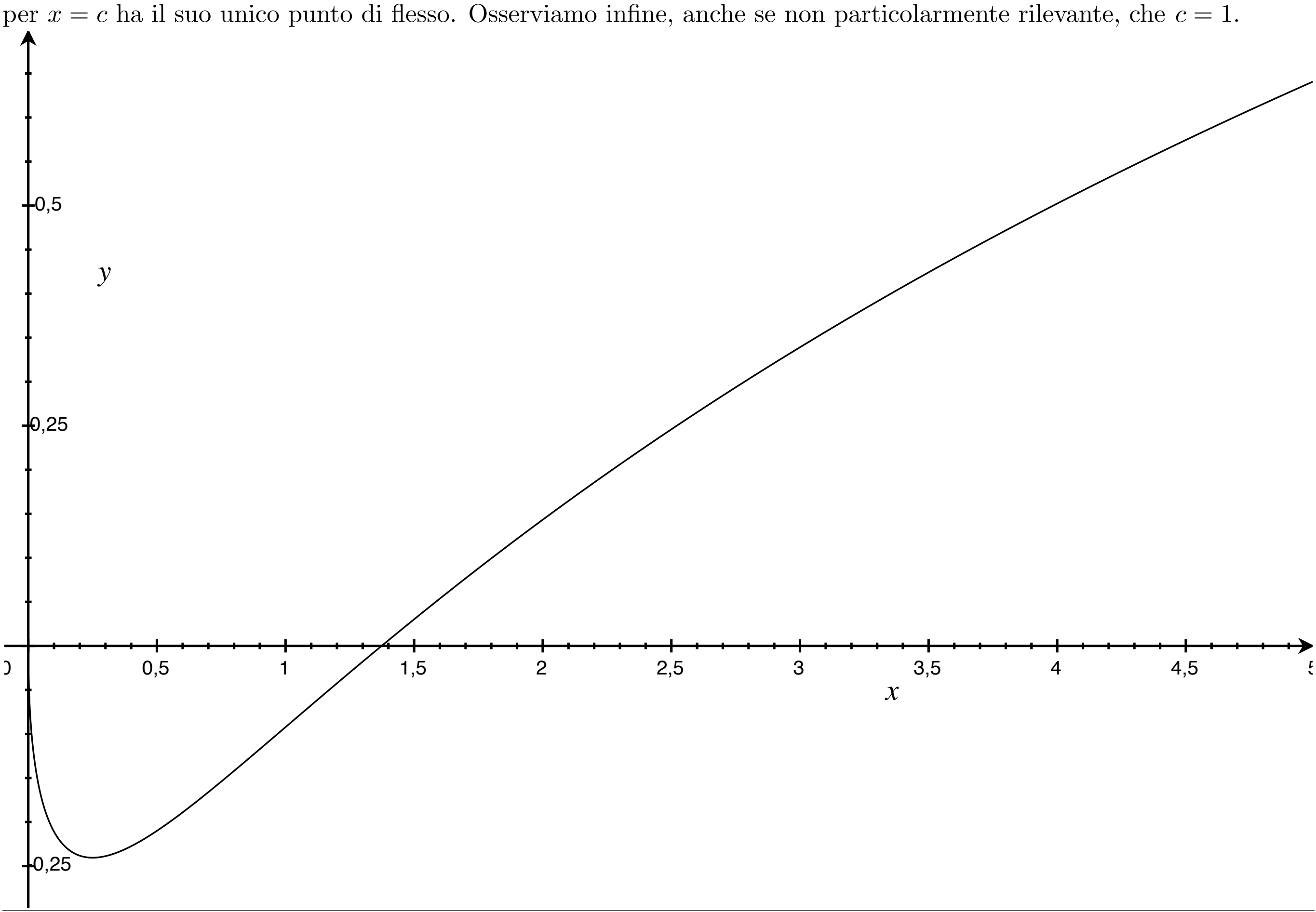
quindi, essendo g una funzione continua, per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto c tale che $g(c) = 0$. Deriviamo ora g ottenendo

$$g'(x) = -6x^{\frac{1}{2}} + 3.$$

Quindi

$$g'(x) > 0 \iff -6x^{\frac{1}{2}} + 3 > 0 \iff 6x^{\frac{1}{2}} < 3 \iff x^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \iff x < \frac{1}{16}.$$

Abbiamo ottenuto che $g(0) = 1 > 0$, che g è strettamente crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{16}\right]$ dove raggiunge il massimo assoluto (che quindi è strettamente positivo) e poi decresce strettamente sulla semiretta $\left[\frac{1}{16}, +\infty\right)$. Ne consegue che g sia annulla in un solo punto. Allora la funzione f è convessa nell'intervallo $[0, c]$, concava sulla semiretta $[c, +\infty)$ e, per $x = c$ ha il suo unico punto di flesso. Osserviamo infine, anche se non particolarmente rilevante, che $c = 1$.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int_0^1 \log(x^2 - 2x + 2) - x \arctan(x^2)\, dx.$$

Soluzione

Consideriamo separatamente i due addendi della funzione integranda. Osserviamo che

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1 > 0$$

quindi il logaritmo è definito in tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamone una primitiva per parti integrando la funzione 1 e derivando $\log(x^2-2x+2)$:

$$\begin{aligned}\int \log(x^2-2x+2)\,dx &= x\log(x^2-2x+2) - \int x\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx = x\log(x^2-2x+2) - 2\int \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}\,dx\\ &= x\log(x^2-2x+2) - 2\int \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x+2} + \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx = x\log(x^2-2x+2) - 2x - \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx\\ &= x\log(x^2-2x+2) - 2x - \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2-2x+2}\\ &= x\log(x^2-2x+2) - 2x - \log(x^2-2x+2) + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}.\end{aligned}$$

Eseguiamo ora l'ultimo integrale con la sostituzione

$$x-1=t, \qquad dx=dt$$

$$2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\arctan t + c = 2\arctan(x-1)+c.$$

Quindi

$$\int \log(x^2-2x+2)\,dx = (x-1)\log(x^2-2x+2) - 2x + 2\arctan(x-1) + c.$$

Calcoliamo ora l'integrale dell'altro addendo, sempre per parti, integrando x e derivando $\arctan(x^2)$:

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x^2)\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c.\end{aligned}$$

Raccogliendo tutti i risultati, otteniamo

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \log(x^2-2x+2) - x\arctan(x^2)\,dx\\ &= \left[(x-1)\log(x^2-2x+2) - 2x + 2\arctan(x-1) - \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) + \frac{1}{4}\log(1+x^4)\right]_0^1\\ &= 0\log 1 - 2 + 2\arctan 0 - \frac{1}{2}\arctan 1 + \frac{1}{4}\log 2 - (-1)\log 2 + 0 - 2\arctan(-1) + 0\arctan 0 - \frac{1}{4}\log 1\\ &= -2 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log 2 + \log 2 + 2\frac{\pi}{4} = -2 + \frac{3}{8}\pi + \frac{5}{4}\log 2.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{-4x^3}{2+x^4}\,y + \sqrt[3]{x}$$

e dimostrare che il punto di ascissa $x=0$ è sempre un punto di minimo locale della soluzione.

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)$$

con $a(x) = \frac{-4x^3}{2+x^4}$, $b(x) = \sqrt[3]{x}$. che sono definite e continue in tutto $\mathbb{R}$. La soluzione generale sarà

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + c\right), \qquad A(x) = \int a(x)\,dx.$$

Calcoliamo le primitive richieste:

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{-4x^3}{2+x^4}\,dx = -\log(2+x^4)$$

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{\log(2+x^4)}\sqrt[3]{x}\,dx = \int (2+x^4)x^{\frac{1}{3}}\,dx = \int 2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{13}{3}}\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{16}x^{\frac{16}{3}}.$$

Avremo quindi

$$y(x) = e^{-\log(2+x^4)}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{16}x^{\frac{16}{3}} + c\right) = \frac{24x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{16}{3}} + 16c}{16(2+x^4)}.$$

A questo punto potremmo derivare la soluzione ottenuta e studiare il segno della derivata in un intorno di $x = 0$ ma possiamo ottenere lo stesso risultato direttamente dall'equazione differenziale. Sostituendo $x = 0$ avremo infatti che

$$y'(0) = 0\,y(0) + 0 = 0.$$

Quindi $x = 0$ è punto stazionario per la soluzione. Inoltre, sempre direttamente dall'equazione differenziale, si ha

$$y'(x) = \sqrt[3]{x}\left(\frac{-4\sqrt[3]{x^{11}}}{2+x^4}y(x) + 1\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4\sqrt[3]{x^{11}}}{2+x^4}y(x) + 1 = 1$$

indipendentemente dal valore di $y(0)$. Ne segue che la quantità $\frac{-4\sqrt[3]{x^{11}}}{2+x^4}y(x) + 1$ è strettamente positiva in un intorno di $x = 0$. Il segno di y' sarà quindi determinato da quello di $\sqrt[3]{x}$ che è negativo per $x < 0$ e positivo per $x > 0$. La funzione $y(x)$ è decrescente in un intorno sinistro di 0 e crescente in un intorno destro, quindi $x = 0$ è punto di minimo locale.