Analisi Matematica

Pisa, 11 luglio 2019

Domanda 1 La derivata della funzione $f(x) = \log\left(\sin(x^3)\right)$ è

A) $\dfrac{1}{\sin(x^3)}$ B) $\dfrac{3\sin^2 x}{x}$ C) $\dfrac{\sin(x^3)}{x} + \dfrac{3x^2 \log x}{\cos(x^3)}$ D) $\dfrac{3x^2}{\tan(x^3)}$

D

Domanda 2 La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2 \sin \frac{1}{x} + \sin x} & \text{se } x > 0 \\ x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

A) è derivabile B) non è continua C) ha un punto angoloso D) ha un punto di cuspide

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x}(3 + \cos x)$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) ha infiniti punti di minimo locale D) non ha né massimo né minimo

D

Domanda 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n) - n}{n^2} =$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) 0

D

Domanda 5 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + n(-1)^n}$

A) ha massimo ma non ha minimo B) ha sia massimo che minimo

C) ha minimo ma non ha massimo D) non ha né massimo né minimo

B

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\, dt$

A) è debolmente crescente B) ha un asintoto obliquo C) è concava D) è limitata inferiormente

D

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx =$

A) -1 B) $e^{\frac{\pi}{2}}$ C) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$ D) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

C

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^{2} e^{x^2}(4x^3 + x)\, dx =$

A) $\dfrac{5e^2+3}{2}$ B) $185e^4 - 1$ C) $4e^2$ D) $\dfrac{13e^4+3}{2}$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^{-y} \log x \\ y(3) = \log 3 + \log\log 3. \end{cases}$ Allora $y(4) =$

A) $\log 4 + \log\log 4$ B) $\log(4\log 4 - 1)$ C) $9 \log 3$ D) $\log\left(\dfrac{1}{4} + 9\log 3\right)$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(-1) = \alpha \\ y'(-1) = \beta. \end{cases}$ Per quali valori dei parametri reali α e β risulta $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$?

A) solo se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ B) per nessun valore di α e β

C) per ogni valore di α e β D) solo se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$

C

codice 205831

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 11 luglio 2019

Domanda 1 La derivata della funzione $f(x) = \log\big(\sin(x^3)\big)$ è

A) $\dfrac{1}{\sin(x^3)}$ B) $\dfrac{3\sin^2 x}{x}$ C) $\dfrac{\sin(x^3)}{x} + \dfrac{3x^2 \log x}{\cos(x^3)}$ D) $\dfrac{3x^2}{\tan(x^3)}$

D

Domanda 2 La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2 \sin\frac{1}{x} + \sin x} & \text{se } x > 0 \\ x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

A) è derivabile B) non è continua C) ha un punto angoloso D) ha un punto di cuspide

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x}(3 + \cos x)$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) ha infiniti punti di minimo locale D) non ha né massimo né minimo

D

Domanda 4 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{x + x^2}$

A) è limitata superiormente B) è strettamente crescente

C) non è limitata inferiormente D) ha minimo

A

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^{t+2}\, dt =$

A) 0 B) $-\infty$

C) $+\infty$ D) e^2

D

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\, dt$

A) è debolmente crescente B) ha un asintoto obliquo C) è concava D) è limitata inferiormente

D

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx =$

A) -1 B) $e^{\frac{\pi}{2}}$ C) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$ D) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

C

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}(4x^3 + x)\, dx =$

A) $\dfrac{5e^2 + 3}{2}$ B) $185e^4 - 1$ C) $4e^2$ D) $\dfrac{13e^4 + 3}{2}$

D

Domanda 9 Sia $z = 1 + i$. Allora $z^5 - z^4 =$

A) $1 - 4i$ B) $4 + i$

C) 1 D) $-4i$

D

Domanda 10 L'equazione di variabile complessa $z^2 = \overline{z}$ ha

A) nessuna soluzione B) una sola soluzione

C) 2 soluzioni D) 4 soluzioni

D

Programma vecchio

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 11 luglio 2019

Esercizio 1 Studiare la funzione
$$f(x) = x^2 - x \log x$$
determinandone insieme di definizione, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo o di minimo locali, convessità, concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

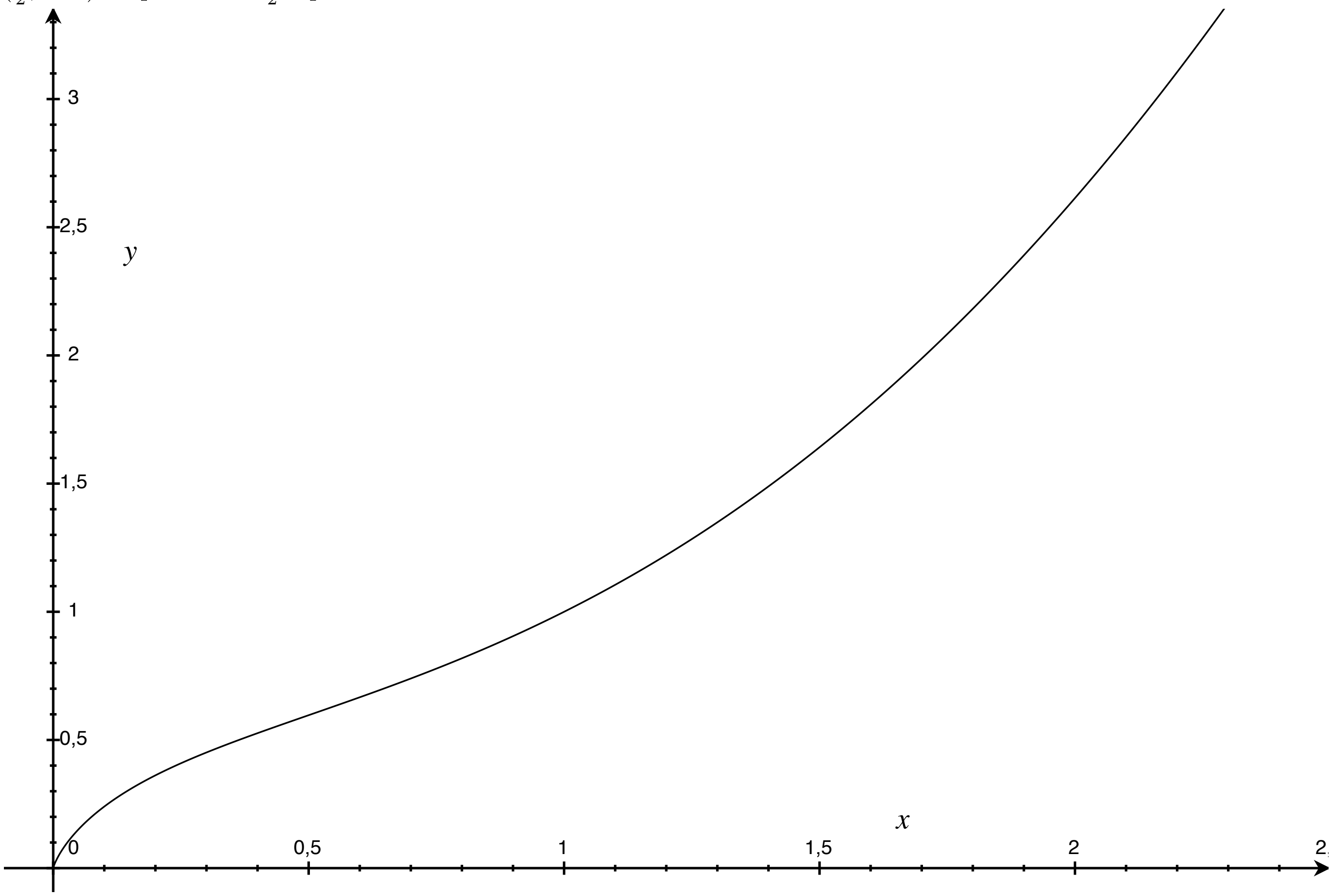
La funzione è definita per $x > 0$ per la presenza del logaritmo. Valutiamo i limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - \lim_{x\to 0^+} x \log x = 0;$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\log x}{x}\right) = (+\infty)^2(1+0) = +\infty.$$
Otteniamo subito che la funzione non è limitata superiormente, quindi
$$\sup(f) = +\infty.$$
Non ci sono né asintoti orizzontali né verticali. Verifichiamo l'esistenza di quelli obliqui:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x\log x}{x} = \lim_{x\to +\infty} x - \log x = \lim_{x\to +\infty} x \left(1 - \frac{\log x}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty.$$
Non ci sono quindi neanche asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata.
$$f'(x) = 2x - \log x - x\,\frac{1}{x} = 2x - \log x - 1.$$
Cerchiamo ora di determinare il segno della derivata. Possiamo utilizzare due metodi.

Primo metodo: la funzione $\log x$ è concava, quindi il suo grafico è sotto la tangente tracciata in un punto qualsiasi. L'equazione della tangente al logaritmo nel punto di ascissa $x = 1$ è $y = x - 1$, quindi $\log x \le x - 1$ per ogni $x > 0$. Ne segue che
$$2x - \log x - 1 > x - \log x - 1 \ge 0 \qquad \forall x > 0.$$
Secondo metodo: osserviamo che
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x - \log x - 1 = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$$
e che
$$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x - \log x - 1 = \lim_{x\to +\infty} x\left(2 - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty(2-0-0) = +\infty.$$
Dato che f' è continua, dal teorema di Weiestrass generalizzato, otteniamo che f' ha minimo sulla semiretta $(0, +\infty)$. Per valutare tale minimo calcoliamo la derivata seconda
$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$$
e osserviamo che
$$f''(x) < 0 \text{ se } 0 < x < \frac{1}{2}, \qquad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f''(x) > 0 \text{ se } x > \frac{1}{2}.$$
Ne segue che $x = \frac{1}{2}$ è punto di minimo assoluto per f' e che
$$\min(f') = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{1}{2} - \log\frac{1}{2} - 1 = -\log\frac{1}{2} = \log 2 > 0.$$

Quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$ e la funzione f è strettamente crescente su tutta la semiretta. Non ci sono quindi punti di massimo o di minimo locali. Risulta inoltre

$$\inf(f) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Dallo studio della derivata seconda otteniamo anche che f è concava nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ e convessa sulla semiretta $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx.$$

Soluzione

Eseguiamo l'integrale per parti, integrando $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ e derivando xe^x

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx &= -\frac{1}{1+x}\, xe^x - \int -\frac{1}{1+x}(e^x + xe^x)\, dx = \frac{-xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x(1+x)}{1+x}\, dx = \frac{-xe^x}{1+x} + \int e^x\, dx \\ &= \frac{-xe^x}{1+x} + e^x + c = \frac{-xe^x + e^x(1+x)}{1+x} + c = \frac{e^x}{1+x} + c.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\log x + 1}{y^2} \\ y(e) = \alpha \end{cases}$$

e si determini per quale valore del parametro α risulta $y(e^2) = \sqrt[3]{6e^2 - 3e + 1}$.

Soluzione

L'equazione differenziale è a variabili separabili. L'integrale generale è definito in forma implicita dall'equazione

$$\int y^2 \, dy = \int \log x + 1 \, dx + c.$$

Integrando si ottiene

$$\frac{y^3}{3} = \int 1 \cdot \log x \, dx + x = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx + x + c = x \log x + c.$$

Ricaviamo la costante c dalla condizione iniziale:

$$\frac{\alpha^3}{3} = e \log e + c \iff c = \frac{\alpha^3}{3} - e.$$

$$\frac{y^3}{3} = x \log x + \frac{\alpha^3}{3} - e.$$

Imponiamo ora la condizione $y(e^2) = \sqrt[3]{6e^2 - 3e + 1}$ ottenendo

$$\frac{6e^2 - 3e + 1}{3} = e^2 \log(e^2) + \frac{\alpha^3}{3} - e \iff 6e^2 - 3e + 1 = 6e^2 + \alpha^3 - 3e \iff \alpha^3 = 1 \iff \alpha = 1.$$

Questo è l'unico possibile valore di α. Tuttavia la formulazione del problema ha senso solo se $y \neq 0$. La soluzione quindi esisterà nel più grande intervallo contenente il punto $x = e$ dove $y(x) \neq 0$. Dobbiamo accertarci che la soluzione non si annulli nell'intervallo $[e, e^2]$. Sostituendo $\alpha = 1$ otteniamo

$$\frac{y^3}{3} = x \log x + \frac{1}{3} - e$$

e, in forma esplicita

$$y(x) = \sqrt[3]{3x \log x + 1 - 3e}.$$

Osserviamo che $y(e) = 1 > 0$ quindi la soluzione deve rimanere sempre strettamente positiva. L'intervallo di definizione sarà determinato risolvendo la disuguaglianza

$$3x \log x + 1 - 3e > 0.$$

Derivando la funzione $3x \log x + 1 - 3e$ otteniamo che è strettamente crescente per $x > \frac{1}{e}$, quindi, per $x > e$ risulterà

$$3x \log x + 1 - 3e > 3e \log e + 1 - 3e = 3e + 1 - 3e = 1 > 0.$$

La soluzione è quindi definita in tutto l'intervallo $[e, +\infty)$.