Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 20 giugno 2019

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

C

Domanda 2 Sia $f(x) = (\log x)^x$. Allora $f'(x) =$

A) $(\log x)^{x-1}$ B) $(\log x)^x \left(\log\log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$ C) $\dfrac{(\log x)^{x-1}}{x}$ D) $(\log x)^x \log\log x$

B

Domanda 3 L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |\cos x| \geq 1\}$ è

A) non limitato B) limitato superiormente C) limitato inferiormente D) un intervallo

A

Domanda 4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt[n]{ne^{n^2}}} =$$

A) 1 B) 0 C) $\sqrt{e}$ D) ∞

D

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{3^n - 100n^2 + n + 1}{n!}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

D

Domanda 6 $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-|x|}\,dx =$

A) 0 B) $e - e^2$ C) $2 - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^2}$ D) $\dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e}$

C

Domanda 7 Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cos x}{e + \sin^3 x}$ tale che $F(0) = \dfrac{4}{3}$. Allora $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

A) $\dfrac{\log(e+1)}{3}$ B) $\dfrac{\log(e+1)+3}{3}$
C) 1 D) $\dfrac{1}{3}$

B

Domanda 8 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx =$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{\pi^2}{8}$
C) 0 D) -2

A

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y^2(x^2+1)} \\ y(0) = \sqrt[3]{3}. \end{cases}$ Allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

A) 0 B) $+\infty$
C) $-\infty$ D) $\sqrt[3]{3}$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2} + e^{\frac{x^2-1}{x}} \\ y(1) = \dfrac{e+4}{e}. \end{cases}$ Allora $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x) =$

A) 1 B) 0
C) 4 D) $-\infty$

B

codice 299642

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 20 giugno 2019

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2-1|}(x-1)$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), eventuali punti angolosi e di cuspide, punti di massimo o di minimo locali, massimo e minimo o estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, dato che la quantità sotto radice è sempre non negativa. La funzione inoltre è continua in ogni punto, quindi non ci sono asintoti verticali. Calcoliamo i limiti per determinare eventuali asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{|(-\infty)^2-1|}(-\infty-1) = \sqrt{|+\infty|}(-\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{|(+\infty)^2-1|}(+\infty-1) = \sqrt{|+\infty|}(+\infty) = +\infty.$$

Non ci sono quindi asintoti verticali. Verifichiamo ora la presenza di eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x^2-1|}\,\frac{x-1}{x} = \sqrt{|(-\infty)^2-1|}\;1 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{|x^2-1|}\,\frac{x-1}{x} = \sqrt{|(+\infty)^2-1|}\;1 = +\infty,$$

quindi non esistono neanche asintoti obliqui.

Dai risultati sui limiti possiamo anche dedurre che

$$\inf(f) = -\infty, \qquad \sup(f) = +\infty$$

e che la funzione non ha né massimo né minimo.

Osserviamo ora che

$$x^2-1 \geq 0 \iff x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}(x-1) & \text{se } x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ \sqrt{1-x^2}(x-1) & \text{se } x \in (-1,1). \end{cases}$$

Calcoliamo ora la derivata. Se $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ allora

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}(x-1) + \sqrt{x^2-1} = \frac{x(x-1)+(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno di f' è determinato da quello del numeratore

$$2x^2-x-1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1 \text{ oppure } -\frac{1}{2},$$

quindi

$$2x^2-x-1 > 0 \iff x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty), \quad 2x^2-x-1 < 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{2},1\right).$$

Tenendo conto che il calcolo appena eseguito è stato fatto per $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, otteniamo che

$$x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Longrightarrow f'(x) > 0.$$

Se invece $x \in (-1, 1)$ risulta

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(x-1) + \sqrt{1-x^2} = \frac{-x(x-1)+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo e che il numeratore è esattamente l'opposto di quello ottenuto precedentemente. Il calcolo è quindi immediato e si ottiene che

$$-2x^2+x+1 > 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \quad -2x^2+x+1 < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$

Combinando questo risultato con il fatto che $x \in (-1, 1)$ abbiamo che

$$x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow f'(x) < 0, \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) > 0.$$

Mettendo insieme tutti i risultati abbiamo che la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1]$, strettamente decrescente in $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, strettamente crescente in $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = -1$ è di massimo locale mentre $x = -\frac{1}{2}$ è di minimo locale. Cerchiamo ora di capire se nei punti $x = -1$ e $x = 1$ la funzione è derivabile. Dato che in tali punti la funzione è continua, possiamo provare a calcolare il limite della derivata.

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x(x-1)+(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1(-2)+0}{0^+} = +\infty,$$

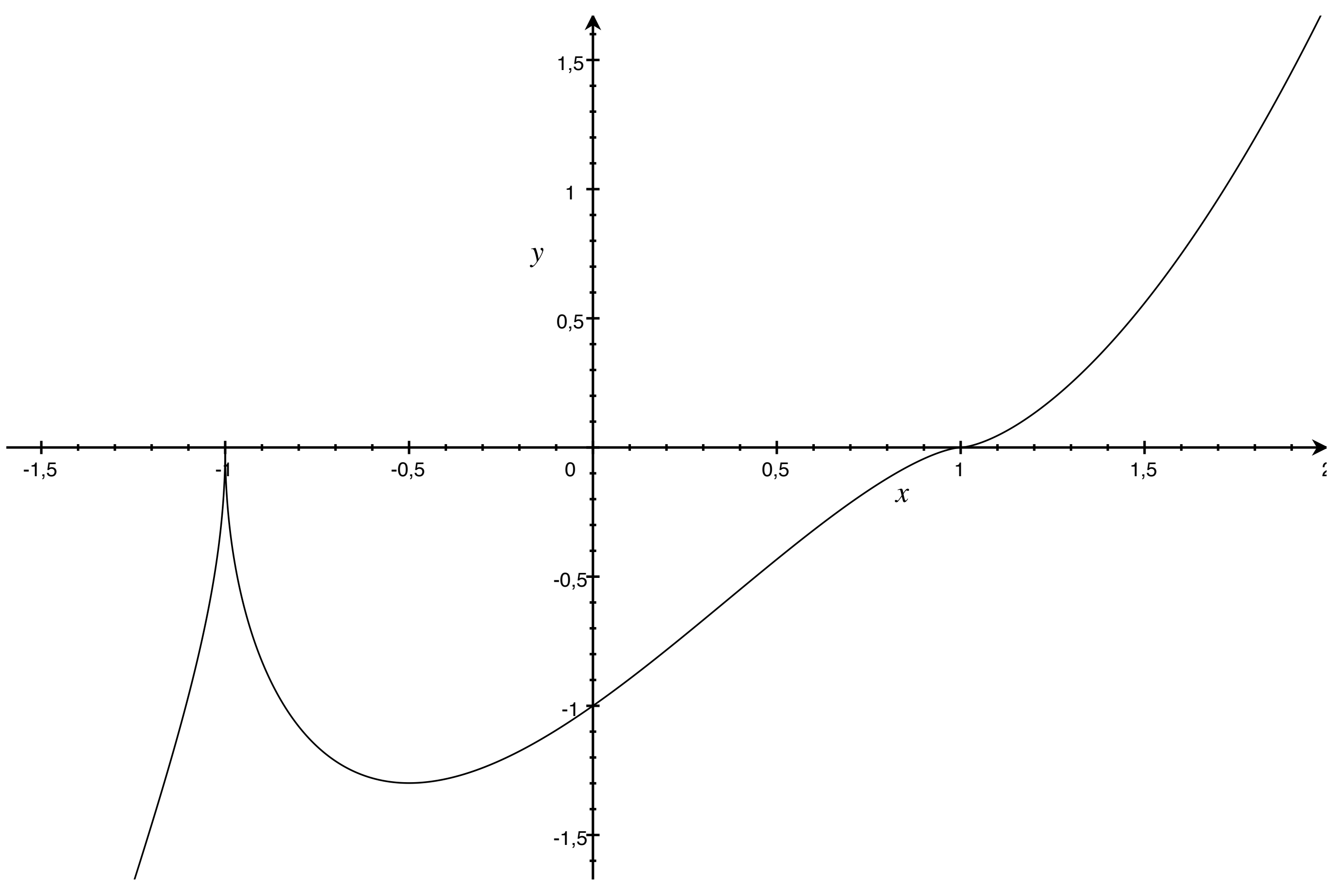
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x(x-1)+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1(-2)+0}{0^+} = -\infty,$$

quindi il punto $x = -1$ è di cuspide.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(x-1)+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)+(1-x)(1+x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)(1+2x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}(1+2x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{0\cdot 3}{\sqrt{2}} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)+(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)+(x-1)(x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}(2x+1)}{\sqrt{x+1}} = \frac{0\cdot 3}{\sqrt{2}} = 0.\end{aligned}$$

Quindi nel punto $x = 1$ la funzione è derivabile e $f'(1) = 0$.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log(x^2+9)\,dx.$$

Soluzione

Eseguiamo l'integrazione per parti:

$$\int \log(x^2+9)\,dx = \int 1\cdot\log(x^2+9)\,dx = x\log(x^2+9) - \int x\frac{2x}{x^2+9}\,dx = x\log(x^2+9) - 2\int \frac{x^2+9-9}{x^2+9}\,dx$$
$$= x\log(x^2+9) - 2\left(\int 1\,dx - \int \frac{9}{x^2+9}\,dx\right) = x\log(x^2+9) - 2x + 2\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con la sostituzione $\frac{x}{3}=t$, $dx = 3dt$

$$\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \int \frac{3}{t^2+1}\,dt = 3\arctan t + c = 3\arctan\frac{x}{3} + c.$$

Quindi

$$\int \log(x^2+9)\,dx = x\log(x^2+9) - 2x + 6\arctan\frac{x}{3} + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = -2\cos(2x) + 29\sin(2x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

il cui polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9$$

ha la radice $\lambda = 3$ con molteplicità 2. La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$$

Dato che $2i$ non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y} = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Deriviamo due volte per determinare i coefficienti A e B.

$$\bar{y}' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$
$$\bar{y}'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) - 6\,(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 9\,(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = -2\cos(2x) + 29\sin(2x).$$

Quindi

$$(-4A - 12B + 9A)\cos(2x) + (-4B + 12A + 9B)\sin(2x) = -2\cos(2x) + 29\sin(2x).$$

Uguagliando i coefficienti di seno e coseno otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 5A & -12B & = -2 \\ 12A & +5B & = 29 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $A = 2, B = 1$. La soluzione particolare è quindi

$$\bar{y} = A\cos(2x) + B\sin(2x) = 2\cos(2x) + \sin(2x).$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta quindi

$$y(x) = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 2\cos(2x) + \sin(2x).$$

Ne segue che

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} - 4\sin(2x) + 2\cos(2x).$$

Avremo allora

$$y(0) = c_1 + 2, \quad y'(0) = 3c_1 + c_2 + 2.$$

Sostituendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 & & +2 & = 2 \\ 3c_1 & +c_2 & +2 & = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $c_1 = 0,\ c_2 = -2$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -2xe^{3x} + 2\cos(2x) + \sin(2x).$$