Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 3 aprile 2019

Domanda 1 La funzione $f(x) = \log(\sin^2 x)$, nel suo insieme di definizione,
A) è iniettiva B) ha un solo punto di minimo assoluto
C) non è limitata superiormente D) ha infiniti punti di massimo locale

D

Domanda 2 L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{4 - e^{(x^2)}}\log(x^2 - 1)$
A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitato ma non ha minimo
C) ha sia massimo che minimo D) non è limitato né superiormente né inferiormente

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{(x^3)} - x^3 - 2x + 3$
A) è iniettiva ma non surgettiva B) è surgettiva ma non iniettiva
C) non è né iniettiva né surgettiva D) è bigettiva

C

Domanda 4 $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + (2n)^3}{3^n + n} =$$
A) $\frac{2}{3}$ B) 0 C) $+\infty$ D) $\log 2 - \log 3$

B

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{\left(\log(n^2+2)\right)^{3n}}{(n+1)^{\frac{n}{4}}}$
A) è debolmente crescente B) ha massimo C) non ha limite D) non è limitata

B

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_2^x e^{t^4}\,dt$
A) è concava in tutto $\mathbb{R}$ B) ha un punto di flesso per $x = 0$
C) è convessa in tutto $\mathbb{R}$ D) ha un punto di flesso per $x = 2$

B

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)\,dx =$
A) 0 B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\sqrt{\pi^3}$

A

Domanda 8 Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log(1+t^2)}{t^2+2}\,dt$. Allora $F'(4) =$
A) $\frac{\log 17}{18}$ B) $\frac{\log 17}{18} - \frac{\log 2}{3}$ C) $\frac{\log 5}{7}$ D) $\frac{\log 5}{24}$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 9. \end{cases}$ Allora $y(2) =$
A) 65 B) $\frac{19}{e^{10}}$ C) $\frac{-14}{e^{10}}$ D) $\frac{7}{e^{10}}$

D

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \cos^2 y \cos x \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ Allora $y\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
A) $\frac{\pi}{4}$ B) 0
C) $\arctan\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ D) $\arctan 2$

D

codice

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 3 aprile 2019

Esercizio 1 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{5x-6}{x^2+x-2}$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti, estremi superiore e inferiore (o eventualmente massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita se il denominatore è diverso da zero. Studiamo quindi l'equazione

$$x^2+x-2=0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \iff x = 1 \text{ oppure } x = -2.$$

L'insieme di definizione della funzione risulta quindi $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,+\infty)$. Cerchiamo ora gli asintoti verticali. Risulta che

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{-10-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-10-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{5-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{5-6}{0^+} = -\infty.$$

Ci sono quindi due asintoti verticali di equazione rispettivamente $x=-2$ e $x=1$. Per determinare gli asintoti orizzontali calcoliamo invece

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

perché il grado del numeratore è strettamente minore di quello del denominatore. C'è quindi un asintoto orizzontale di equazione $y=0$ sia per x che tende a $-\infty$ che per x che tende a $+\infty$. Data la presenza dell'asintoto orizzontale, non ci sono asintoti obliqui. Dai risultati sui limiti possiamo anche concludere che la funzione non ha né massimo né minimo e che

$$\inf(f) = -\infty, \qquad \sup(f) = +\infty.$$

Per determinare i punti di massimo e di minimo locali, studiamo la monotonia calcolando la derivata:

$$f'(x) = \frac{5(x^2+x-2)-(5x-6)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{5x^2+5x-10-10x^2-5x+12x+6}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-5x^2+12x-4}{(x^2+x-2)^2}$$

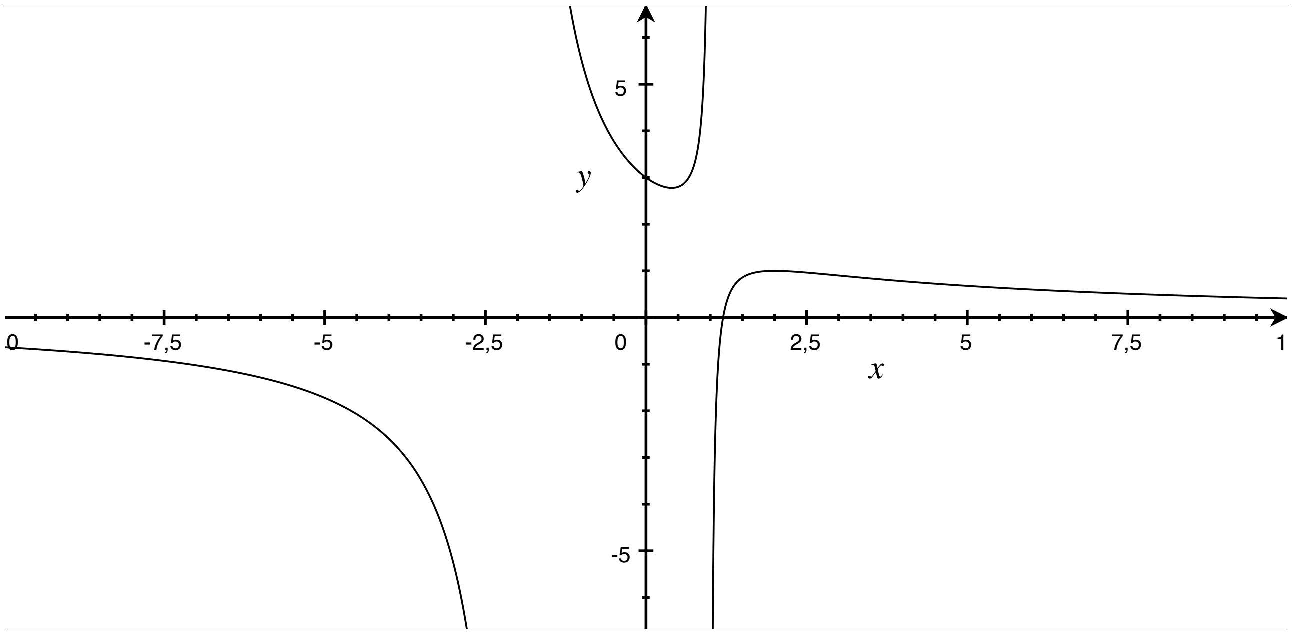
Dato che il denominatore, nell'insieme di definizione, è sempre positivo, il segno sarà determinato da quello del numeratore.

$$-5x^2+12x-4=0 \iff x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{-5} \iff x = \frac{6 \mp 4}{5} \iff x = \frac{2}{5} \text{ oppure } x = 2.$$

Avremo allora che

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{2}{5},1\right) \cup (1,2), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty,-2) \cup \left(-2,\frac{2}{5}\right) \cup (2,+\infty), \qquad f'\left(\frac{2}{5}\right) = f'(2) = 0.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente in $(-\infty,-2)$ e in $\left(2,\frac{2}{5}\right]$, strettamente crescente in $\left[\frac{2}{5},1\right)$ e in $(1,2]$ e strettamente decrescente in $[2,+\infty)$. Il punto di ascissa $x=\frac{2}{5}$ è di minimo locale mentre $x=2$ è di massimo locale.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} dx.$$

Soluzione

Eseguendo la sostituzione

$$t = \sqrt{x}, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} = \int \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \arctan t + c = 2 \arctan(\sqrt{x}) + c.$$

Esercizio 3 Determinare prima l'integrale generale dell'equazione

$$y' = e^{x-y},$$

specificando l'insieme di definizione delle soluzioni. Risolvere poi il relativo problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = 0$. Discutere se esistono soluzioni limitate dell'equazione.

Soluzione