Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 4 febbraio 2019

C

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x - 2\sin x < 0\}$. Allora
A) $\sup(A) = 2$ B) $\inf(A) = 0$ C) $\inf(A) = -\infty$ D) $\sup(A) = \sin 2$

B

Domanda 2 Sia $f(x) = (\log x)^{\log^2 x}$. Allora $f'(x) =$

A) $(\log x)^{(\log^2 x)-1}$ B) $\dfrac{2\log\log x + 1}{x}(\log x)^{(\log^2 x)+1}$ C) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2\log x}{x}}$ D) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log^2 x} + (\log x)^{\frac{2\log x}{x}}$

A

Domanda 3 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ definita da $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{1 + e^{(x^2)}}\right)$
A) è bigettiva B) è iniettiva ma non surgettiva
C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

B

Domanda 4 $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n!) - n\log n =$
A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) e D) 0

A

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{n^4 - 3n^3}{e^{5\log(n+1)}}$
A) ha sia massimo che minimo B) non è limitata superiormente
C) è debolmente decrescente D) ha massimo ma non ha minimo

C

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx =$

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) -3 C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{12\pi - \pi^3}{24}$

A

Domanda 7 Sia $F(x) = \displaystyle\int_e^{x^2} \frac{\log t}{(t^2+2)e^{\sqrt{t}}}\,dt$. Allora $F'(e) =$

A) $\dfrac{4}{(e^4+2)e^{e-1}}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{(e^2+2)e^{\sqrt{e}}}$ D) $\dfrac{2}{(e^4+2)e^e} - \dfrac{1}{(e^2+2)e^{\sqrt{e}}}$

C

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{7x+1}\,dx =$

A) $-\dfrac{9}{16}$ B) $-\dfrac{47}{24}$ C) $\dfrac{45}{28}$ D) 12

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -2xy \\ y(1) = \dfrac{3}{e}. \end{cases}$ Allora $y(0) =$

A) $\dfrac{3-e}{3}$ B) 3 C) -1 D) $3 - e$

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 0 \\ y(-\frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{3\pi}{2}} \\ y'(-\frac{\pi}{2}) = -9e^{\frac{3\pi}{2}}. \end{cases}$ Allora $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) =$

D

A) $2e^{-\frac{3\pi}{2}}$ B) $+\infty$
C) 0 D) non esiste

codice 699033

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 4 febbraio 2019

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x - 2\sin x < 0\}$. Allora

A) $\sup(A) = 2$ B) $\inf(A) = 0$ C) $\inf(A) = -\infty$ D) $\sup(A) = \sin 2$

C

Domanda 2 Sia $f(x) = (\log x)^{\log^2 x}$. Allora $f'(x) =$

A) $(\log x)^{(\log^2 x)-1}$ B) $\dfrac{2\log\log x + 1}{x}(\log x)^{(\log^2 x)+1}$ C) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2\log x}{x}}$ D) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log^2 x} + (\log x)^{\frac{2\log x}{x}}$

B

Domanda 3 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ definita da $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{1 + e^{(x^2)}}\right)$

A) è bigettiva B) è iniettiva ma non surgettiva

C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

A

Domanda 4 La funzione $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x + \cos^4 x$

A) ha sia massimo che minimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo

C) ha massimo ma non ha minimo D) ha minimo ma non ha massimo

A

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\log|1 - x^2|}{x^3 \sin(x^2 - 1)} =$

A) $+\infty$ B) $-\infty$

C) 0 D) -1

B

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx =$

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) -3 C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{12\pi - \pi^3}{24}$

C

Domanda 7 Sia $F(x) = \displaystyle\int_e^{x^2} \frac{\log t}{(t^2 + 2)e^{\sqrt{t}}}\, dt$. Allora $F'(e) =$

A) $\dfrac{4}{(e^4 + 2)e^{e-1}}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{(e^2 + 2)e^{\sqrt{e}}}$ D) $\dfrac{2}{(e^4 + 2)e^e} - \dfrac{1}{(e^2 + 2)e^{\sqrt{e}}}$

A

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{7x + 1}\, dx =$

A) $-\dfrac{9}{16}$ B) $-\dfrac{47}{24}$ C) $\dfrac{45}{28}$ D) 12

C

Domanda 9 $\left(\dfrac{2}{1 + i\sqrt{3}}\right)^6 =$

A) 1 B) $\dfrac{64}{1 - 27i}$ C) $\dfrac{12}{6 - i6\sqrt{3}}$ D) $\dfrac{2}{1 + i6\sqrt{3}}$

A

Domanda 10 L'equazione $\bar{z}^2 - z^2 = 1$

A) ha due soluzioni B) ha una sola soluzione

C) non ha soluzione D) ha infinite soluzioni

C

Programma Vecchio

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 4 febbraio 2019

Esercizio 1 Studiare e disegnare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{1/x}.$$

In particolare calcolare dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, asintoti, derivata prima e derivata seconda e determinare eventuali punti di massimo o minimo locali e la concavità della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Dato che la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, il segno di f è determinato da quello della radice cubica, quindi

$$f(x) > 0 \iff x > 0, f(0) = 0, f(x) < 0 \iff x < 0.$$

Calcoliamo ora i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt[x]{-\infty} \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \sqrt[3]{0} \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Eseguendo il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{t}}\, e^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

per gerarchia di infiniti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt[3]{+\infty} \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale (da destra) di equazione $x = 0$. Controlliamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^0}{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^0}{+\infty} = 0,$$

non ci sono quindi asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata prima, osservando che la funzione è derivabile in tutto il suo dominio.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{\frac{1}{x}} + x^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2}) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}}\right) = e^{\frac{1}{x}}x^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$e^{\frac{1}{x}} > 0 \qquad \forall x \neq 0,$$

$$x^{-\frac{5}{3}} > 0 \iff x > 0,$$

$$\frac{x}{3} - 1 > 0 \iff x > 3$$

quindi

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty), \qquad f'(3) = 0, \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (0, 3).$$

La funzione risulta quindi strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, strettamente decrescente in $(0, 3]$ e strettamente crescente in $[3, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 3$ è di minimo locale. La funzione non ha né massimo né minimo in quando, dai risultati sui limiti

$$\inf(f) = -\infty, \qquad \sup(f) = +\infty.$$

Calcoliamo ora la derivata seconda. Partendo dall'espressione della derivata prima

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} \right)$$

otteniamo

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2}) \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} \right) + e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{3} x^{-\frac{8}{3}} + x^{-\frac{11}{3}} - \frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{3} x^{-\frac{8}{3}} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{x}} x^{-\frac{11}{3}} \left(1 + \frac{4}{3} x - \frac{2}{9} x^2 \right).$$

Studiamo il segno della derivata seconda.

$$e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad x^{-\frac{11}{3}} > 0 \iff x > 0.$$

Studiamo ora il segno del trinomio di secondo grado:

$$1 + \frac{4}{3} x - \frac{2}{9} x^2 = 0 \iff 2x^2 - 12x - 9 = 0 \iff x = \frac{6 \pm 3\sqrt{6}}{2}$$

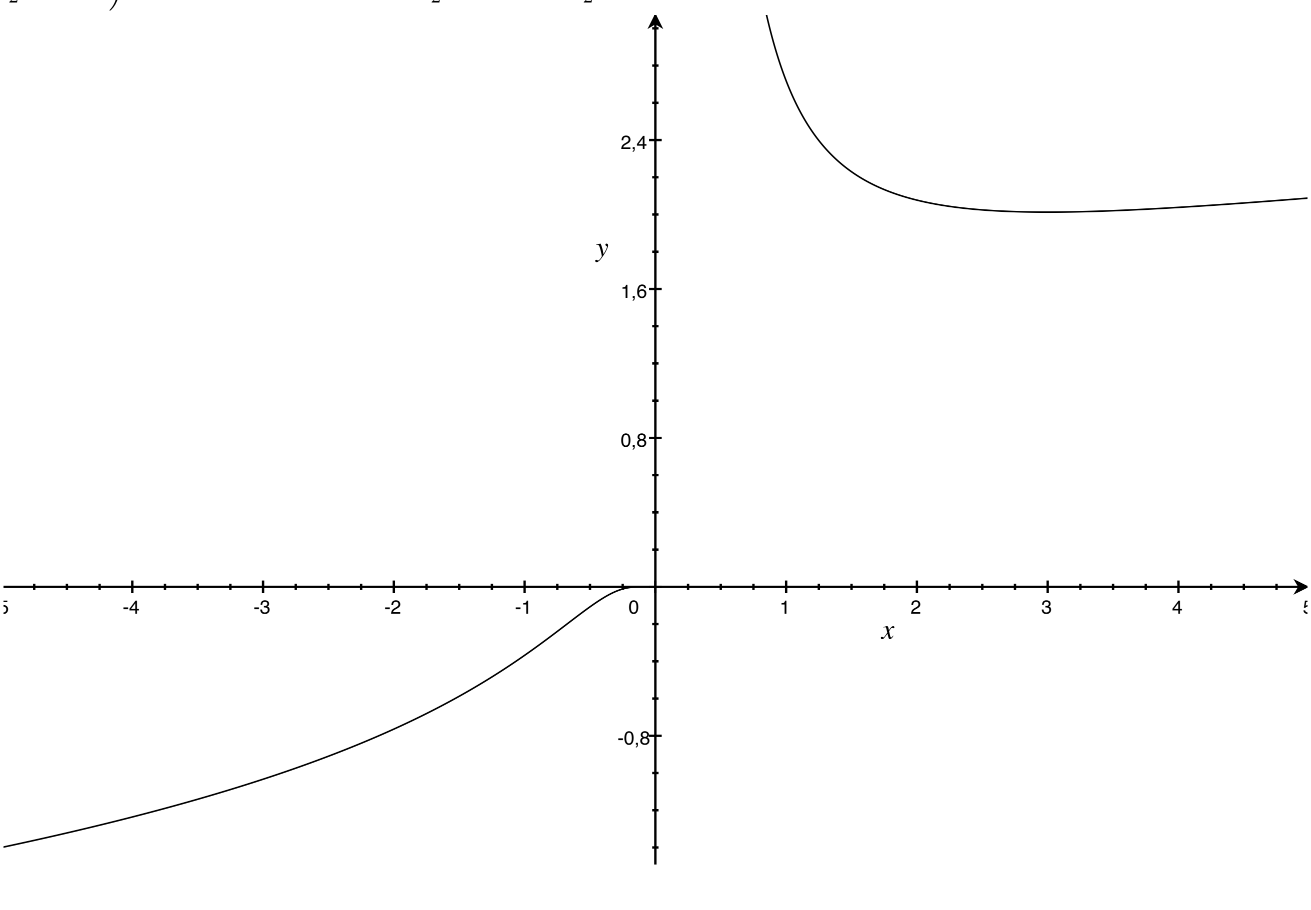
quindi

$$1 + \frac{4}{3} x - \frac{2}{9} x^2 > 0 \iff \frac{6 - 3\sqrt{6}}{2} < x < \frac{6 + 3\sqrt{6}}{2}.$$

Combinando i segni dei fattori otteniamo che

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{6 - 3\sqrt{6}}{2} \right) \cup \left(0, \frac{6 + 3\sqrt{6}}{2} \right), \qquad f'' \left(\frac{6 - 3\sqrt{6}}{2} \right) = f'' \left(\frac{6 + 3\sqrt{6}}{2} \right) = 0.$$

La funzione è quindi convessa in $\left(-\infty, \frac{6-3\sqrt{6}}{2} \right]$, concava in $\left(\frac{6-3\sqrt{6}}{2}, 0 \right)$, convessa in $\left(0, \frac{6+3\sqrt{6}}{2} \right)$ e concava in $\left(\frac{6+3\sqrt{6}}{2}, +\infty \right)$. I punti di ascissa $x = \frac{6-3\sqrt{6}}{2}$ e $x = \frac{6+3\sqrt{6}}{2}$ sono di flesso.



Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int x \arctan\left(\sqrt{x^2 - 1} \right) \, dx.$$

Soluzione

Integriamo per parti derivando $\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$ e integrando x:

$$\int x \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2-1} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

Con la sostituzione

$$x^2 - 1 = t, \qquad \frac{dt}{dx} = 2x, \qquad x\, dx = \frac{dt}{2}$$

otteniamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c = \sqrt{x^2-1} + c.$$

Sostituendo in quanto ottenuto precedentemente abbiamo:

$$\int x \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.$$

Esercizio 3 Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ dove $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^5 y' + 7x^4 y = x^4 - 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione