Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 gennaio 2019

Domanda 1 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^3)}{x\sin(x^2)} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} & \text{se } x\geq 0, \end{cases}$ nel punto $x=0$

A) è continua a sinistra ma non a destra B) è continua
C) è continua a destra ma non a sinistra D) non è continua né a destra né a sinistra

C

Domanda 2 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

A) ha minimo B) ha un asintoto orizzontale e uno verticale
C) non è limitata inferiormente D) è limitata ma non ha né massimo né minimo

A

Domanda 3 La funzione $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

A) ha massimo ma non ha minimo B) non è limitata
C) ha sia massimo che minimo D) è limitata ma non ha né massimo né minimo

C

Domanda 4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos(n^3)-\log(1+n^4)}{n^3+2(-1)^n}=$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) non esiste C) 0 D) $-\infty$

C

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\log(n+1)-\log n\right)^n=$

A) 0 B) $+\infty$ C) 1 D) e^2

D

Domanda 6 La funzione $F(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_3^x \frac{\log(t+5)}{t^2}\,dt & \text{se } x>3 \\ \dfrac{\log 8}{9}x-\dfrac{\log 8}{3} & \text{se } x\leq 3 \end{cases}$

A) ha un punto angoloso per $x=3$ B) è derivabile nel punto $x=3$
C) non è continua nel punto $x=3$ D) ha un punto di cuspide per $x=3$

B

Domanda 7 Una primitiva della funzione $f(x)=\dfrac{\cos(2\log x)}{x}$ è

A) $\cos(\log x)\sin(\log x)$ B) $\dfrac{-2\sin(2\log x)-\cos(2\log x)}{x^2}$ C) $\dfrac{-2\sin(2\log x)}{x}$ D) $\dfrac{\sin(2\log x)}{x^2}$

A

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^5\frac{x-5}{x^2-10x+41}\,dx=$

A) $\dfrac{-3}{226}$ B) $\log 4-\dfrac{1}{2}\log 41$ C) $\log 4-\dfrac{1}{2}\log 41-\dfrac{5}{4}\arctan\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{3}{4}\log\dfrac{1}{2}+3\log\dfrac{9}{2}$

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=x^4y^2 \\ y(0)=1. \end{cases}$ Allora $y(-1)=$

A) 8 B) $\dfrac{5}{6}$ C) 0 D) $\dfrac{5}{4}$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''+8y'+17y=0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4e^{-\pi} \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2e^{-\pi}. \end{cases}$ Allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y(x)=$

A) non esiste B) $+\infty$ C) 0 D) $\dfrac{\pi}{2}$

C

codice 599213

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 gennaio 2019

Domanda 1 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^3)}{x\sin(x^2)} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

A) è continua a sinistra ma non a destra B) è continua
C) è continua a destra ma non a sinistra D) non è continua né a destra né a sinistra

C

Domanda 2 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

A) ha minimo B) ha un asintoto orizzontale e uno verticale
C) non è limitata inferiormente D) è limitata ma non ha né massimo né minimo

A

Domanda 3 La funzione $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

A) ha massimo ma non ha minimo B) non è limitata
C) ha sia massimo che minimo D) è limitata ma non ha né massimo né minimo

C

Domanda 4 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - |x|$. Allora

A) $x = 0$ è punto di flesso per f B) $x = 0$ è punto di minimo locale per f
C) $x = 0$ è punto di massimo locale per f D) $x = 0$ è punto di cuspide per f

C

Domanda 5 La funzione $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^3} e^{(t^2)}\, dt$

A) ha un solo punto di flesso B) è convessa C) è concava D) ha tre punti di flesso

A

Domanda 6 La funzione $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_3^x \frac{\log(t+5)}{t^2}\, dt & \text{se } x > 3 \\ \dfrac{\log 8}{9} x - \dfrac{\log 8}{3} & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$

A) ha un punto angoloso per $x = 3$ B) è derivabile nel punto $x = 3$
C) non è continua nel punto $x = 3$ D) ha un punto di cuspide per $x = 3$

B

Domanda 7 Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\cos(2\log x)}{x}$ è

A) $\cos(\log x)\sin(\log x)$ B) $\dfrac{-2\sin(2\log x) - \cos(2\log x)}{x^2}$ C) $\dfrac{-2\sin(2\log x)}{x}$ D) $\dfrac{\sin(2\log x)}{x^2}$

A

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^5 \frac{x-5}{x^2 - 10x + 41}\, dx =$

A) $\dfrac{-3}{226}$ B) $\log 4 - \dfrac{1}{2}\log 41$ C) $\log 4 - \dfrac{1}{2}\log 41 - \dfrac{5}{4}\arctan\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{3}{4}\log\dfrac{1}{2} + 3\log\dfrac{9}{2}$

B

Domanda 9 Dire quali dei seguenti $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $z^3 = i$

A) $z = \dfrac{i}{3}$ B) $z = i^3$ C) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

D

Domanda 10 Il sistema di equazioni $|z| = |z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 1,\ z \in \mathbb{C}$

A) ha due soluzioni B) ha infinite soluzioni C) ha una sola soluzione D) non ha soluzioni

C

programma vecchio

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 14 gennaio 2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2|}}{x - 2},$$

determinandone dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti. Studiare poi la sua derivata e discutere l'esistenza di massimi e minimi locali.

Soluzione

Osserviamo che l'argomento della radice quadrata è sempre non negativo, quindi la funzione è definita quando il denominatore non si annulla, cioè se $x \neq 2$. In tale insieme la funzione è anche continua. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left|1 - \frac{2}{x^2}\right|}}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\left|1 - \frac{2}{x^2}\right|}}{x(1 - \frac{2}{x})} = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{\left|1 - \frac{2}{x^2}\right|}}{x(1 - \frac{2}{x})} = 1.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = -1$ per x che tende a $-\infty$, uno di equazione $y = 1$ per x che tende a $+\infty$ e un asintoto verticale di equazione $x = 2$. Non ci sono asintoti obliqui. La funzione non è né inferiormente né superiormente limitata.

Prima di calcolare la derivata dividiamo il dominio per esplicitare il valore assoluto.

$$x^2 - 2 \geq 0 \iff x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x - 2} & \text{se } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right) \\ \\ \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x - 2} & \text{se } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Esaminiamo prima il caso $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}(x - 2) - \sqrt{x^2 - 2}}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 2) - (x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2}{(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2 - 2x}{(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Il denominatore è sempre positivo mentre il numeratore è positivo per $x < 1$ e negativo per $x > 1$, quindi, nella parte di dominio che stiamo considerando, avremo

$$f'(x) > 0 \quad \text{se } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \qquad f'(x) < 0 \quad \text{se } x \in \left(\sqrt{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).$$

Vediamo ora il caso $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}(x-2) - \sqrt{2-x^2}}{(x-2)^2} = \frac{-x(x-2)-(2-x^2)}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-x^2+2x-2+x^2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Anche in questo caso il denominatore è positivo e il numeratore è positivo per $x > 1$, negativo per $x < 1$.

Mettendo insieme i risultati otteniamo che la funzione è strettamente crescente in $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right]$, strettamente decrescente in $[-\sqrt{2}, 1]$, strettamente crescente in $\left[1, \sqrt{2}\right]$, strettamente decrescente in $[\sqrt{2}, 2)$ e strettamente decrescente in $(2, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ è di massimo locale, $x = 1$ è di minimo locale, $x = \sqrt{2}$ è di massimo locale.

Esaminiamo ora la derivabilità nei punti $x = \pm\sqrt{2}$. Dato che la funzione è continua in tali punti, possiamo provare a fare il limite destro e sinistro della derivata.

$$f'_-(-\sqrt{2}) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} \frac{2-2x}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

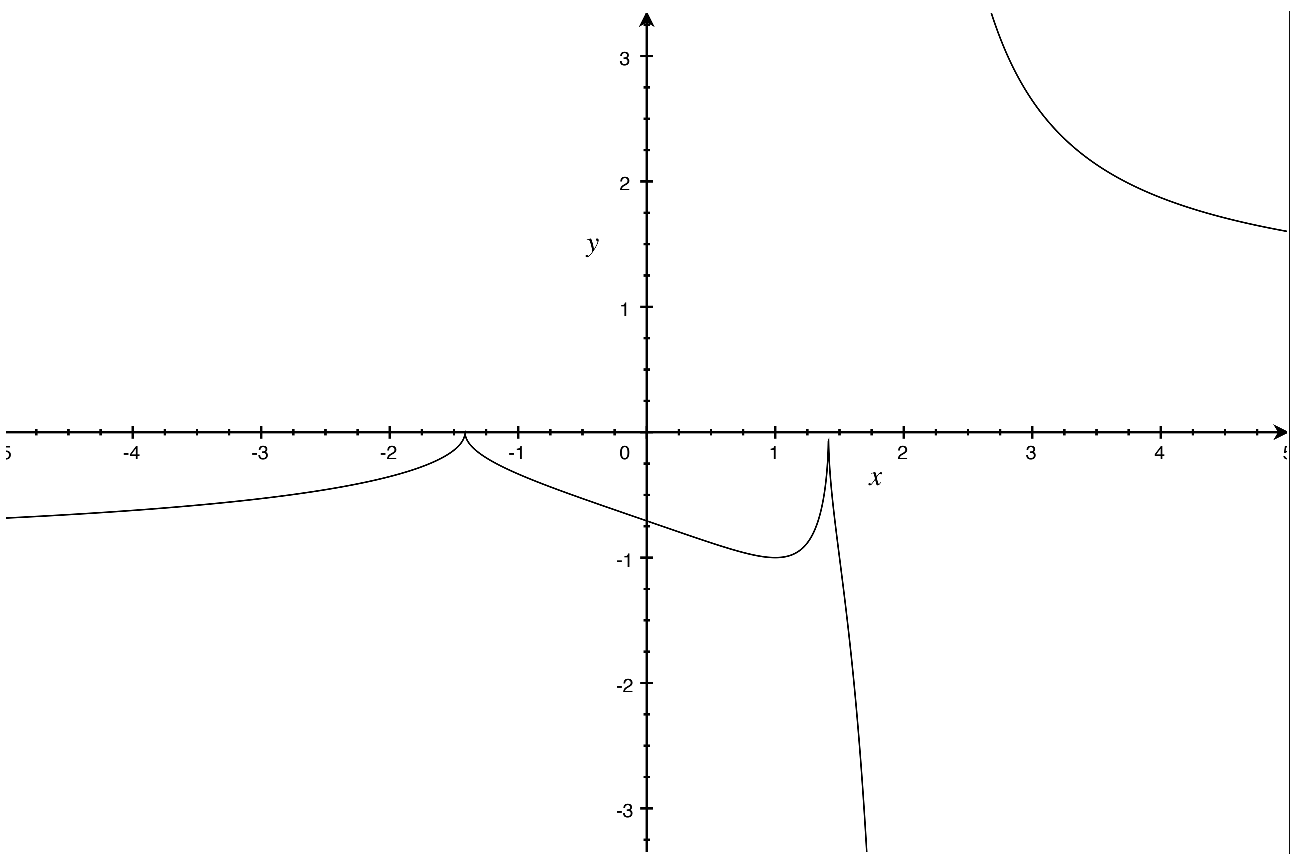
$$f'_+(-\sqrt{2}) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}-2}{0^+} = -\infty$$

il punto $x = -\sqrt{2}$ è quindi di cuspide.

$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{2x-2}{(2-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{0^+} = +\infty$$

$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{2-2x}{(x^2-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{0^+} = -\infty$$

e anche il punto $x = \sqrt{2}$ è di cuspide.



Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx.$$

Soluzione

L'integranda è una funzione razionale con denominatore di grado superiore al denominatore. Eseguiamo la divisione fra polinomi ottenendo

$$x^5 - 3x^4 + x + 3 = (x^3 - 3x^2 + x - 3)(x^2 - 1) + 2x$$

quindi

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\,dx = \int x^3 - 3x^2 + x - 3\,dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2 - 1| + c.$$

Esercizio 3 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= xy(x)\log(y(x)) \\ y(0) &= e \end{cases}$$

Si consideri poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= xy(x)\log(y(x)) \\ y(0) &= \alpha \end{cases}$$

e si dica per quali $\alpha > 0$ la soluzione ha massimo, ha minimo oppure ha sia massimo che minimo.

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili. Se $y \neq 0,\ y \neq 1$ (e questo è sicuramente vero in un intorno del punto iniziale, dato che $y(0) = e$) possiamo dividere per $y \log y$, ottenendo

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int x\,dx + c.$$

Eseguendo la sostituzione $t = \log y$ abbiamo che

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\log y|.$$

Quindi

$$\log|\log y| = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dato che nel punto iniziale $\log y(0) = \log e = 1 > 0$ possiamo considerare $\log y > 0$ in tutto l'intervallo di esistenza. Allora

$$\log(\log y) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Sostituendo $x = 0$ e $y = e$ otteniamo

$$\log(\log e) = 0 + c \iff c = 0.$$

La soluzione del problema di Cauchy sarà quindi

$$\log(\log y) = \frac{x^2}{2} \iff \log y = e^{\frac{x^2}{2}} \iff y = e^{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)}.$$

Vediamo ora come cambiano le cose con la condizione iniziale $y(0) = \alpha$. L'integrale generale dell'equazione differenziale è ancora

$$\log|\log y| = \frac{x^2}{2} + c.$$

Questa volta dobbiamo però considerare che se $\alpha > 1$ nel punto iniziale sarà $\log y(0) = \log \alpha > 0$ quindi $\log y > 0$ in tutto l'intervallo di definizione e la soluzione diventa

$$\log(\log y) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale abbiamo

$$\log(\log \alpha) = 0 + c$$

quindi

$$\log(\log y) = \frac{x^2}{2} + \log(\log\alpha) \iff \log y = e^{\frac{x^2}{2}}\log\alpha \iff y = e^{e^{\frac{x^2}{2}}\log\alpha}.$$

Osserviamo ora che la funzione è pari e che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$$

quindi la soluzione ha sicuramente minimo e non ha massimo. Se invece $0 < \alpha < 1$ risulta $\log y(0) = \log\alpha < 0$ quindi sarà $\log y < 0$ nell'intervallo di esistenza. Allora la soluzione diventa

$$\log(-\log y) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Ricavando la costante dalla condizione iniziale otteniamo

$$\log(-\log\alpha) = 0 + c.$$

Sostituendo nella soluzione abbiamo

$$\log(-\log y) = \frac{x^2}{2} + \log(-\log\alpha) \iff -\log y = e^{\frac{x^2}{2}}(-\log\alpha) \iff y = e^{e^{\frac{x^2}{2}}\log\alpha}.$$

Dato che $\log\alpha < 0$ otteniamo che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$

e, considerando che $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione ha sicuramente massimo ma non ha minimo.

Se invece $\alpha = 1$ allora $\log\alpha = 0$ e non possiamo eseguire la divisione iniziale per separare le variabili. Ma in questo caso il problema di Cauchy ha la soluzione costante $y(x) = 1$ che ha ovviamente sia massimo che minimo.