Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 19 dicembre 2018

Domanda 1 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n} =$$

D

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{e}$ D) $+\infty$

Domanda 2 La successione $a_n = \frac{1}{n^2+1}\left(\left(\log \frac{1}{n^2}\right) + \log(n^2+1)\right)$, definita per $n \geq 1$,

B

A) non è limitata inferiormente B) ha massimo ma non ha minimo
C) ha sia massimo che minimo D) è debolmente crescente

Domanda 3 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n^2} - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \left(\sin \frac{2}{n}\right)^2} =$$

B

A) -3 B) $-\frac{1}{2}$ C) $+\infty$ D) 0

Domanda 4 La successione $a_n = \frac{n!e^{2n} + \sin(n!)}{n^n + e^n}$

B

A) è limitata B) è inferiormente ma non superiormente limitata
C) è debolmente decrescente D) ha massimo

Domanda 5 $$\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx =$$

A

A) $\frac{9\pi}{4}$ B) $\frac{89\pi^2}{16}$ C) 7π D) 1

Domanda 6 Indicando con $[x]$ la parte intera di x, risulta che $\int_0^3 x - [x]\,dx =$

C

A) 3 B) 0 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{4}$

Domanda 7 $$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\log x)^2} =$$

A

A) $\frac{1}{\log 2} - 1$ B) $1 - \log 2$ C) $\frac{1}{\log 2} - \log 2$ D) $1 - \frac{1}{\log 2} - \log(\log 2)$

Domanda 8 Sia y una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale $y' = 6yx^2 + x^2$. Allora $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

C

A) dipende dalla soluzione scelta B) 0 C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\infty$

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2x+\sin x}{y^2} \\ y(0) = 3. \end{cases}$ Allora $y\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

B

A) $\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{4}}$ B) $\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{4} + 30}$ C) $\sqrt[3]{\frac{\pi^2+8}{2}}$ D) $\frac{-4+2\pi^2}{\pi^2}$

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = -19. \end{cases}$ La funzione $y(x)$

D

A) è limitata B) non è limitata né superiormente né inferiormente
C) è limitata inferiormente ma non superiormente D) è limitata superiormente ma non inferiormente

codice 400354

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 19 dicembre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{(x-1)^2}$$

determinandone insieme di definizione, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, estremi inferiore e superiore. Determinare l'esistenza di punti di massimo o minimo locale. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza di $\log(x)$ e del denominatore $(x-1)^2$, la funzione risulta definita sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq 1\}$. Quindi la funzione non si annulla mai, poiché l'unico zero del numeratore è $x = 1$ che però non appartiene al dominio della funzione. Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$

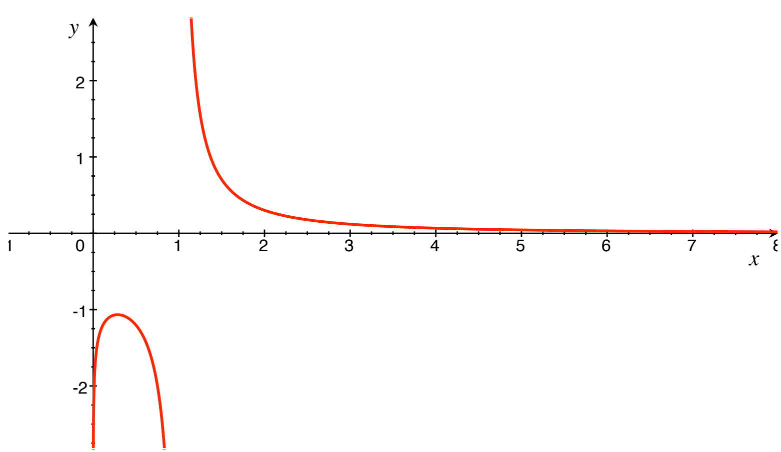
da cui deduciamo l'esistenza dell'asintoto verticale $x = 1$ e dell'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre, $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. La derivata della funzione vale

$$f'(x) = \frac{x - 2x\log(x) - 1}{x(x-1)^3}.$$

Al fine di determinare l'esistenza di punti di massimo e minimo locale, studiamo la derivata prima ed in particolare cerchiamo punti in cui essa si annulli. La derivata si annulla laddove il suo numeratore si annulla, ovvero negli eventuali punti x_* tali che $g(x) = 0$ ove $g(x) = x - 2x\log(x) - 1$. La funzione g ammette ovviamente lo zero $x_* = 1$, punto che pero' non appartiene al dominio di f. Calcoliamo allora

$$g'(x) = -1 - 2\log(x)$$

che si annulla per $0 < x = 1/\sqrt{e} < 1$, è positiva per $x < 1/\sqrt{e}$ ed è negativa per $x > 1/\sqrt{e}$. Di conseguenza, il punto $x = 1/\sqrt{e}$ è un punto di massimo per g. Poiché $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$, g è crescente sull'intervallo $(0, 1/\sqrt{e})$ e $g(1/\sqrt{e}) = 2/\sqrt{e} - 1 > 0$, possiamo dedurre che esiste un punto $0 < x_* < 1/\sqrt{e} < 1$ tale che $g(x_*) = 0$. Ricordando che $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^3}$, abbiamo che $f'(x_*) = 0$, mentre $f' > 0$ per $x < x_*$ e $f' < 0$ per $x > x_*$. Quindi la funzione f ha un solo punto di massimo locale nel punto $0 < x_* < 1$, è crescente sull'intervallo $(0, x_*)$, decrescente su $(x_*, 1)$ e ancora decrescente su $(1, +\infty)$.



Esercizio 2 Calcolare
$$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx.$$

Soluzione

Con la sostituzione $e^x = t$, possiamo calcolare
$$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx = \int \frac{t^2+1}{t^2-3t+2}dt.$$
Ora scomponiamo la frazione ed effettuiamo la divisione tra polinomi per ottenere
$$\int \frac{t^2+1}{t^2-3t+2}dt = \int dt + \int \frac{3t-2}{t^2-3t+2}dt + \int \frac{1}{t^2-3t+2}dt.$$
Procediamo riscrivendo il secondo integrale a destra dell'uguaglianza sopra come segue:
$$\int \frac{3t-2}{t^2-3t+2}dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t-3}{t^2-3t+2}dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2-3t+2}dt.$$
In virtù di questa scomposizione possiamo calcolare
$$\int \frac{t^2+1}{t^2-3t+2}dt = \int dt + \frac{3}{2}\int \frac{2t-3}{t^2-3t+2}dt + \frac{7}{2}\int \frac{1}{t^2-3t+2}dt.$$
Ricaviamo facilmente che $t^2-3t+2 = (t-2)(t-1)$ e quindi possiamo calcolare gli integrali seguenti
$$\frac{3}{2}\int \frac{2t-3}{t^2-3t+2}dt = \frac{3}{2}\log|(t-2)(t-1)| + C,$$
$$\frac{7}{2}\int \frac{1}{t^2-3t+2}dt = \frac{7}{2}\log\left|\frac{t-2}{t-1}\right| + C.$$
Sommando ed usando le proprietà dei logaritmi otteniamo
$$\int \frac{t^2+1}{t^2-3t+2}dt = t + 5\log|t-2| - 2\log|t-1| + C,$$
ove C è una costante. Infine sostituiamo $t = e^x$ e concludiamo
$$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx = e^x + 5\log|e^x-2| - 2\log|e^x-1| + C.$$

Esercizio 3 Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' + y' - 6y = 1 - 18x^2.$$

Soluzione

L'equazione è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti Consideriamo prima l'equazione omogenea associata, ovvero
$$y'' + y' - 6y = 0.$$
Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata risulta $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$ che ha due radici reali distinte $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata si scrive quindi come
$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$
Cerchiamo ora una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione completa. Secondo il metodo di somiglianza cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$. Calcoliamo $\bar{y}' = 2ax + b$ e $\bar{y}'' = 2a$. Sostituendo nell'equazione otteniamo che $\bar{y}$ è soluzione dell'equazione completa se e solo se vale
$$2a + 2ax + b - 6ax^2 - 6bx - 6c = 1 - 18x^2$$
, ovvero se e solo se $2a + b - 6c = 1$, $2a - 6b = 0$ e $-6a = -18$, ovvero se e solo se $a = 3$, $b = 1$ e $c = 1$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora data da $\bar{y} = 3x^2 + x + 1$. Concludiamo che la soluzione generale dell'equazione completa è
$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + 3x^2 + x + 1.$$