Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 30 ottobre 2018

Domanda 1 L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^6 + \log(x^2)}$, nel punto di ascissa $x = 1$ è

A) $y = -5x + 5$ B) $y = -5x + 1$

C) $y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{5}{8}$ D) $y = -5x + 6$

D

Domanda 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(2x))\sin x}{\log(1+x^2)} =$

A) 2 B) 0

C) 1 D) $+\infty$

B

Domanda 3 La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(e^{-x})$

A) è debolmente crescente B) è strettamente decrescente

C) non è limitata D) ha infiniti punti di massimo locale ma non ha massimo

B

Domanda 4 Sia $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$ Allora

A) f è continua in $\mathbb{R}$ B) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'_+(0)$

C) f è continua in $(-\infty, 0]$ D) $f'(0) = 1$

B

Domanda 5 L'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - \dfrac{1}{x^3} < 7\right\}$

A) è limitato B) è limitato superiormente ma non inferiormente

C) è limitato inferiormente ma non superiormente D) non è limitato né superiormente né inferiormente

A

Domanda 6 La derivata della funzione $f(x) = (\cos x)^x$, nel suo insieme di derivabilità, è

A) $(\cos x)^x (\log(\cos x) - x \tan x)$ B) $(\cos x)^{x-1}$

C) $-\sin x(\cos x)^{x-1}$ D) $(\cos x)^x \left(\frac{\cos x}{x} - (\log x)(\sin x)\right)$

A

Domanda 7 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 8 La funzione $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{1 - e^x}$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è bigettiva

C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

C

Domanda 9 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^6 + \log x}{x^4 + e^{\sqrt{x}}}$

A) ha un asintoto orizzontale e uno verticale B) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto

C) ha un asintoto obliquo D) non ha asintoti verticali

A

Domanda 10 Il massimo della funzione $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ vale

A) -20 B) -18

C) -28 D) 80

B

codice 983501

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 30 ottobre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Sia

$$f(x) = |x|e^{-(x^2+3)}.$$

- Disegnare il grafico di f mettendone in evidenza gli zeri, i punti critici, gli intervalli di monotonia.
- Trovare gli eventuali asintoti e punti di non derivabilità.
- Determinare, se esistono, massimo, minimo, sup e inf di f.
- Trovare i punti di flesso della funzione.

Soluzione

La funzione è definita in tutta la retta reale $\mathbb{R}$ e si annulla solo quando $|x| = 0$ dato che la funzione esponenziale assume solo valori strettamente maggiori di zero. Quindi l'unico zero della funzione è per $x = 0$. Dato che

$$f(-x) = |-x|e^{-(-x)^2+3} = |x|e^{-(x^2+3)} = f(x)$$

la funzione è pari. La studieremo quindi solo per $x \geq 0$ e in questo caso avremo

$$f(x) = xe^{-(x^2+3)}.$$

Calcoliamo la derivata per trovare i punti critici e gli intervalli di monotonia

$$f'(x) = 1\,e^{-(x^2+3)} + xe^{-(x^2+3)}(-2x) = e^{-(x^2+3)}(1-2x^2).$$

Avremo che

$$f'(x) = 0 \iff 1-2x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

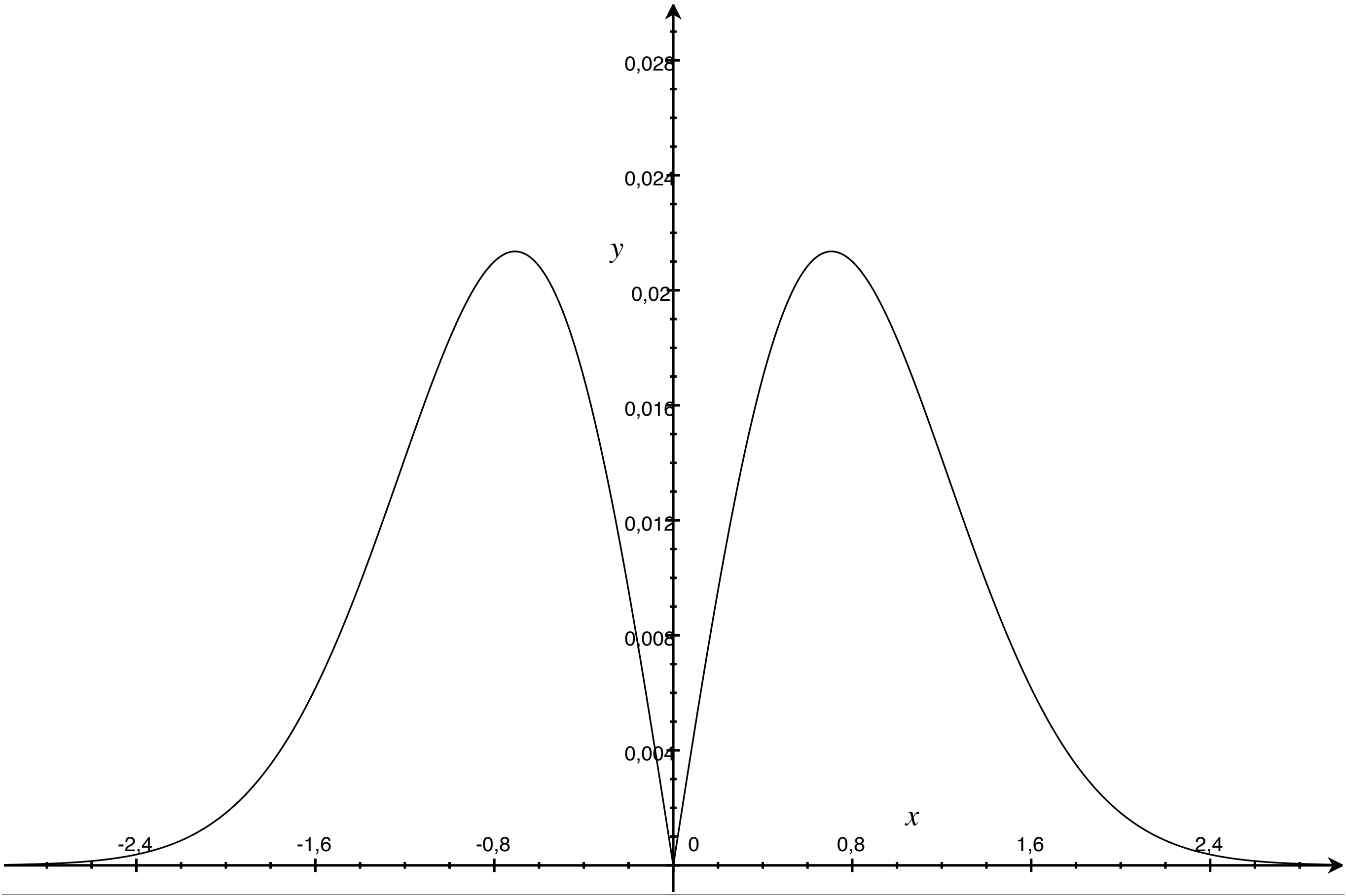
che, nell'intervallo $x \geq 0$ restituisce il valore $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Per quanto riguarda il segno, abbiamo $e^{-(x^2+3)} > 0$, quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Nel punto $x = 0$ possiamo fare solo la derivata destra e osservare che $f'_+(0) = e^{-3}$. Per simmetria otteniamo subito che $f'_-(0) = -e^{-3}$, quindi il punto $x = 0$ è un punto angoloso. Avremo quindi che f è strettamente crescente sulla semiretta $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$, strettamente crescente in $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. I punti $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di massimo assoluto mentre il punto $x = 0$ è di minimo assoluto. Il massimo della funzione vale $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{-(\frac{1}{2}+3)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2e^7}}$ e il minimo vale $f(0) = 0$. Per trovare i punti di flesso calcoliamo la derivata seconda sulla semiretta $x > 0$.

$$f''(x) = e^{-(x^2+3)}(-2x)(1-2x^2) + e^{-(x^2+3)}(-4x) = e^{-(x^2+3)}(-2x)(1-2x^2+2) = e^{-(x^2+3)}(-2x)(3-2x^2).$$

Dato che $e^{-(x^2+3)} > 0$ e $(-2x) < 0$, dovremo determinare solo il segno di $3 - 2x^2$, sempre sulla semiretta $x > 0$.

$$3 - 2x^2 > 0 \iff 2x^2 < 3 \iff x^2 < \frac{3}{2} \iff 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Abbiamo ottenuto che $f''(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$, $f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0$ e $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Ne segue che la funzione è concava in $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, convessa in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ e il punto $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è di flesso. Per simmetria f è convessa in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, concava in $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$ e il punto $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ è di flesso.



Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$$

Soluzione

Troviamo prima una primitiva della funzione eseguendo la sostituzione

$$t = 2x+1, \quad \frac{dt}{dx} = 2, \quad dx = \frac{dt}{2}$$

e ottenendo

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\log t}{t^2}\,dt.$$

Ora integriamo per parti, integrando t^{-2} e derivando $\log t$

$$\int \frac{\log t}{t^2}\,dt = -t^{-1}\log t - \int -t^{-1}\frac{1}{t}\,dt = -\frac{\log t}{t} + \int t^{-2}\,dt = -\frac{\log t}{t} - t^{-1} + c = -\frac{\log t + 1}{t} + c.$$

Tornando alla variabile x e ricordando il fattore $\frac{1}{2}$, otteniamo quindi

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{\log(2x+1)+1}{2(2x+1)} + c.$$

Dal teorema di Torricelli abbiamo quindi

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{\log(2x+1)+1}{2(2x+1)}\right]_0^2 = -\frac{(\log 5)+1}{10} + \frac{(\log 1)+1}{2} = \frac{4-\log 5}{10}.$$

Esercizio 3 Si trovi l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3x + 1).$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

che ha radici

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \{1, 2\}.$$

L'integrale generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Troviamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Dato che il termine noto contiene e^{2x} e 2 è radice del polinomio caratteristico, siamo in presenza di risonanza e cercheremo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Derivando due volte la soluzione abbiamo

$$\bar{y}'(x) = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx)2e^{2x} = e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)$$

$$\bar{y}''(x) = 2e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + e^{2x}(4Ax + 2A + 2B) = e^{2x}(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B).$$

Sostituiamo ora nell'equazione completa ottenendo

$$e^{2x}(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B) - 3e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = e^{2x}(3x + 1).$$

Dividendo per e^{2x} abbiamo

$$(4A - 6A + 2A)x^2 + (8A + 4B - 6A - 6B + 2B)x + 2A + 4B - 3B = 3x + 1.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{3}{2},\ B = -2$. La soluzione particolare sarà quindi

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)e^{2x}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)e^{2x}.$$