Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 3 settembre 2018

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) non esiste la derivata di f in $x = 0$ B) $f'(0) = +\infty$
C) f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ D) $f'_+(0) = -\infty,\ f'_-(0) = +\infty$

C

Domanda 2 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4\cos(x^2)$
A) non è né iniettiva né surgettiva B) è bigettiva
C) è iniettiva ma non surgettiva D) è surgettiva ma non iniettiva

D

Domanda 3 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt[4]{x}}{x^2 + |\log x|}$
A) ha massimo ma non ha minimo B) ha sia massimo che minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) non ha né massimo né minimo

A

Domanda 4 L'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : -2n^3 + 2n^2 + n > -2\}$
A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

A

Domanda 5
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{(\sin\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}} =$$
A) 0 B) $-\infty$ C) $+\infty$ D) -3

B

Domanda 6 Sia $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^5} \log(1+t)\,dt$. Allora $F''(x) =$

A) $\dfrac{5x^4}{x^5+1}$ B) $20x^3\log(x+1) + \dfrac{5x^4}{x+1}$ C) $20x^3\log(x^5+1) + \dfrac{25x^8}{x^5+1}$ D) $\log(x^5+1) - \log 4$

C

Domanda 7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{n\pi}^{(n+2)\pi} (\sin x)^2(\cos x)^2\,dx =$

A) non esiste B) 0 C) $+\infty$ D) $\dfrac{\pi}{2}$

B

Domanda 8 Una primitiva della funzione $f(x) = \sin^4 x\cos x\left(\dfrac{1}{\tan^2 x} + 1\right)$ è

A) $4\sin x\cos x + \sin^2 x\cos x - \dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}$ B) $\dfrac{\sin^3 x}{3}$ C) $\dfrac{\cos^5 x\sin x}{5}\left(\dfrac{1}{\tan^3 x} + x\right)$ D) $\dfrac{\cos^3 x\sin^3 x}{3}$

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + 5x \\ y(0) = -9. \end{cases}$ Allora $y(3) =$

A) -24 B) 6 C) $-20 - 4e^3$ D) $-10 - 14e^3$

C

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(\pi) = -e^{2\pi} \\ y'(\pi) = -5e^{2\pi}. \end{cases}$ Allora $y(2\pi) =$

A) $e^{4\pi}$ B) $e^{2\pi}$ C) $-5e^{12\pi} + 2e^{2\pi}$ D) $7e^{2\pi}$

A

codice 864246

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 3 settembre 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = (3x+2)e^{x^3+1}$ determinandone insiemi di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali. Trovare almeno un punto di flesso della funzione e tracciare un grafico approssimativo.

Soluzione

La funzione è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo il limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\, e^{-\infty} = -\infty\, 0$$

forma indeterminata che si può facilmente risolvere con il teorema di De l'Hôpital riscrivendo prima la funzione in questo modo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{e^{-x^3-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-3x^2e^{-x^3-1}} = \frac{3}{-\infty\, e^{+\infty}} = \frac{3}{-\infty} = 0^-.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\, e^{+\infty} = +\infty.$$

Da questi risultati si deduce subito che la funzione non è superiormente limitata e che ha minimo.

Controlliamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{x} e^{x^3+1} = 3\, e^{+\infty} = +\infty$$

non ci sono quindi asintoti obliqui.

Determiniamo ora i punti di massimo o minimo locali calcolando la derivata

$$f'(x) = 3e^{x^3+1} + (3x+2)3x^2e^{x^3+1} = 3e^{x^3+1}(3x^3+2x^2+1)$$

il cui segno è determinato solo da quello del polinomio

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$$

che avrà sicuramente almeno una radice reale, essendo di grado dispari. Osserviamo che $p(-1) = -3+2+1 = 0$ quindi il polinomio è divisibile per $x+1$. Eseguendo la divisione tra polinomi otteniamo

$$3x^3 + 2x^2 + 1 = (x+1)(3x^2 - x + 1)$$

e il trinomio $3x^2 - x + 1$ non ha radici reali, avendo discriminante negativo, quindi è sempre positivo. Ne consegue che $f'(x) < 0$ se $x < -1$, $f'(-1) = 0$ e $f'(x) > 0$ se $x > -1$. La funzione f è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, -1]$, strettamente crescente sulla semiretta $[1, +\infty)$ e il punto $x = -1$ è di minimo assoluto. Avremo anche che

$$\min(f) = f(-1) = (-3+2)e^{-1+1} = -1.$$

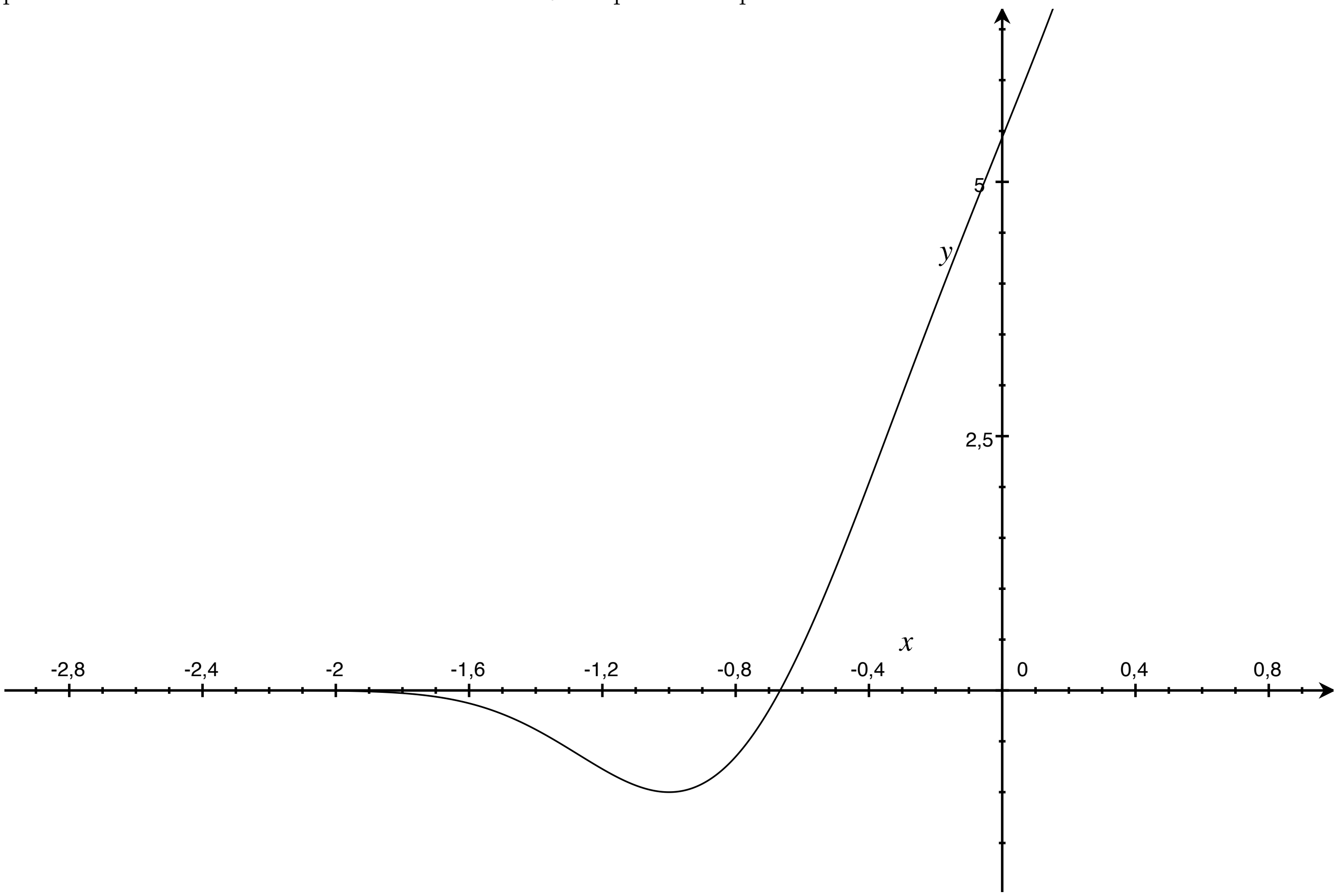
Cerchiamo ora eventuali punti di flesso calcolando la derivata seconda.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\left(3x^2e^{x^3+1}(3x^3+2x^2+1) + e^{x^3+1}(9x^2+4x)\right) = 3e^{x^3+1}(9x^5+6x^4+3x^2+9x^2+4x) \\ &= 3e^{x^3+1}x(9x^4+6x^3+12x+4). \end{aligned}$$

Il segno della derivata seconda è determinato da quello del polinomio

$$q(x) = x(9x^4 + 6x^3 + 12x + 4).$$

Ponendo $r(x) = 9x^4 + 6x^3 + 12x + 4$ è immediato verificare che $r(0) = 4$, quindi il teorema sulla permanenza del segno ci garantisce che $r(x) > 0$ in un intorno di $x = 0$. Ne segue che $q(x) > 0$ in un intorno sinistro di 0 e $q(x) > 0$ in un intorno destro di 0. Allora $f''(x) < 0$ in un intorno sinistro di 0 e $f''(x) > 0$ in un intorno destro. La funzione quindi passa da concava a convessa attraversando $x = 0$ che pertanto è punto di flesso.



Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int (3x^2 + 2x) \arctan x \, dx$.

Soluzione

Utilizziamo la formula di integrazione per parti derivando $\arctan x$ e integrando $3x^2 + 2x$.

$$\int (3x^2 + 2x) \arctan x \, dx = (x^3 + x^2) \arctan x - \int (x^3 + x^2) \frac{1}{x^2 + 1} \, dx.$$

Per integrare la funzione razionale $\dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}$ eseguiamo la divisione fra polinomi ottenendo

$$x^3 + x^2 = (x^2 + 1)(x + 1) - x - 1.$$

Avremo allora

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} \, dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x + 1) - x - 1}{x^2 + 1} \, dx = \int x + 1 \, dx - \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 1} \, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \arctan x + c.$$

Unendo questo risultato al precedente otteniamo che

$$\int (3x^2 + 2x) \arctan x \, dx = (x^3 + x^2) \arctan x - \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \arctan x \right) + c$$
$$= (x^3 + x^2 + 1) \arctan x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 9y = (-14x - 33)e^{2x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Soluzione

Iniziamo risolvendo l'equazione omogenea associata

$$y'' - 9y = 0$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 9$ che ha le radici $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 3$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati. Il termine noto è un polinomio di primo grado per l'esponenziale $e^{\alpha x}$ con $\alpha = 2$. Dato che 2 non è radice del polinomio caratteristico, non siamo in presenza di risonanza. Cercheremo allora una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{2x}.$$

Derivando due volte otteniamo

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + (Ax + B)2e^{2x} = e^{2x}(2Ax + A + 2B)$$

$$\bar{y}'' = 2e^{2x}(2Ax + A + 2B) + e^{2x}2A = e^{2x}(4Ax + 2A + 4B + 2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo

$$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - 9e^{2x}(Ax + B) = (-14x - 33)e^{2x}.$$

Dividendo per e^{2x} abbiamo

$$4Ax + 4A + 4B - 9Ax - 9B = -14x - 33 \iff -5Ax + 4A - 5B = -14x - 33.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -5A & & = -14 \\ -4A & -5B & = -33 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $A = \frac{14}{5}$, $B = \frac{221}{25}$. La soluzione particolare risulta quindi

$$\bar{y} = \left(\frac{14}{5}x + \frac{221}{25}\right)e^{2x}.$$

La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione dell'omogenea con la soluzione particolare

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \left(\frac{14}{5}x + \frac{221}{25}\right)e^{2x}.$$

Troviamo ora i coefficienti c_1 e c_2 utilizzando le condizioni iniziali. Deriviamo la soluzione

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{3x} + \frac{14}{5}e^{2x} + 2\left(\frac{14}{5}x + \frac{221}{25}\right)e^{2x}.$$

Sostituendo $x = 0$ abbiamo

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{221}{25}, \qquad y'(0) = -3c_1 + 3c_2 + \frac{14}{5} + \frac{442}{25}.$$

Otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 & +c_2 & +\dfrac{221}{25} & = -2 \\ -3c_1 & +3c_2 & +\dfrac{512}{25} & = 4 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $c_1 = -\frac{401}{150}$, $c_2 = -\frac{49}{6}$. Sostituendo nella soluzione generale otteniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = -\frac{401}{150}e^{-3x} - \frac{49}{6}e^{3x} + \left(\frac{14}{5}x + \frac{221}{25}\right)e^{2x}.$$