Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 17 luglio 2018

Domanda 1 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{x+\log x}{x(1+\log^2 x)}$

A) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto B) non ha asintoti
C) ha un asintoto orizzontale e uno verticale D) ha un asintoto obliquo

C

Domanda 2 La funzione $f(x)=\arctan(\tan x)$, nel suo insieme di definizione, è

A) strettamente crescente B) continua ma non derivabile C) non continua D) derivabile

D

Domanda 3 L'insieme $A=\{x\in\mathbb{R}: 3x^2(x^2-2)<5x^2+1\}$

A) è limitato superiormente ma non inferiormente B) non è limitato né superiormente né inferiormente
C) è limitato inferiormente ma non superiormente D) è limitato

D

Domanda 4 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin(n^2)+\log n}{(-1)^n(3n^2+1)}=$$

A) 0 B) $\dfrac{2}{3}$ C) non esiste D) $+\infty$

A

Domanda 5 La successione $a_n=\log(n^2)-\log^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$

A) non ha limite B) è definitivamente strettamente decrescente e $\inf(a_n)=-\infty$
C) è definitivamente strettamente crescente e $\sup(a_n)=+\infty$ D) è limitata

B

Domanda 6 $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\log^2 x}=$

A) $\log 3-\log 2$ B) $\dfrac{3\log 3+6}{\log^3 3}-\dfrac{2\log 2+4}{\log^3 2}$ C) $\dfrac{2}{\log^3 2}-\dfrac{2}{\log^3 3}$ D) $\dfrac{1}{\log 2}-\dfrac{1}{\log 3}$

D

Domanda 7 Una primitiva della funzione $f(x)=\dfrac{e^{(3-\log x)}}{x}$ è

A) $e^{(3-x\log x-x)}$ B) $x^{(3-\log x)}$ C) $\dfrac{-2e^3}{x^3}$ D) $-\dfrac{e^3}{x}$

D

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos(2x)\,dx=$

A) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{\pi}{4}-1$ C) 0 D) $-\dfrac{\pi}{2}-1$

A

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=\dfrac{x^2-\log x}{y^2} \\ y(1)=-\sqrt[3]{2}. \end{cases}$ Allora $y(2)=$

A) $\sqrt[2]{2-6\log 2}$ B) $\sqrt[3]{8-6\log 2}$ C) $\dfrac{3\log 2-12}{8}$ D) $\dfrac{1}{6-2\log 2}$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''-16y=0 \\ y(0)=-3 \\ y'(0)=4. \end{cases}$ Allora $y(1)=$

A) $4e^{-4}-3e^{-4}$ B) $\dfrac{e^{16}-13}{4}$ C) $\dfrac{-2-e^8}{e^4}$ D) $4e^{16}-3$

C

codice 700635

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 17 luglio 2018

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = 2x|\log|x|| - x$

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, la funzione è definita per $|x| > 0$, quindi per $x \neq 0$. Osserviamo che la funzione è dispari, infatti
$$f(-x) = 2(-x)|\log|-x|| - (-x) = -(2x|\log|x|| - x) = -f(x)$$
la studieremo quindi per $x \in (0, +\infty)$, ottenedo i risultati sulla semiretta $(-\infty, 0)$ per simmetria. Avremo quindi che per $x > 0$ la funzione diventa
$$f(x) = 2x|\log x| - x = \begin{cases} -2x\log x - x & \text{se } x \in (0,1] \\ 2x\log x - x & \text{se } x \in (1, +\infty), \end{cases}$$
dato che
$$\log x > 0 \iff x > 1.$$
La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Vediamo ora i limiti. Utilizzando il teorema di de l'Hôpital, abbiamo
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -2x\log x - x = \left(\lim_{x\to 0^+} -2x\log x\right) - 0 = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x\log x - x = \lim_{x\to +\infty} x(2\log x - 1) = +\infty.$$
Per simmetria avremo quindi
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$
La funzione quindi non è limitata né superiormente né inferiormente. Non sono presenti asintoti né orizzontali né verticali. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui.
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x\log x - x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\log x - 1 = +\infty$$
non vi sono quindi asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata.
$$f'(x) = \begin{cases} -2\log x - 2x\dfrac{1}{x} - 1 = -2\log x - 3 & \text{se } x \in (0,1) \\ 2\log x + 2x\dfrac{1}{x} - 1 = 2\log x + 1 & \text{se } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$
La funzione è quindi derivabile sicuramente per $x \neq 1$. Per esaminare il punto $x = 1$, dato che la funzione è continua in tale punto, possiamo tentare di calcolare il limite della derivata da destra e da sinistra.
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2\log x - 3 = -2\log 1 - 3 = 0 - 3 = -3$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2\log x + 1 = 2\log 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$
quindi
$$f'_-(1) = -3, \qquad f'_+(1) = 1$$
e il punto di ascissa $x = 1$ è un punto angoloso. Per simmetria, anche il punto $x = -1$ è un punto angoloso.
Vediamo ora il segno della derivata.
Se $x \in (0,1)$ avremo che
$$f'(x) > 0 \iff -2\log x - 3 > 0 \iff -3 > 2\log x \iff -\frac{3}{2} > \log x \iff e^{-\frac{3}{2}} > x$$

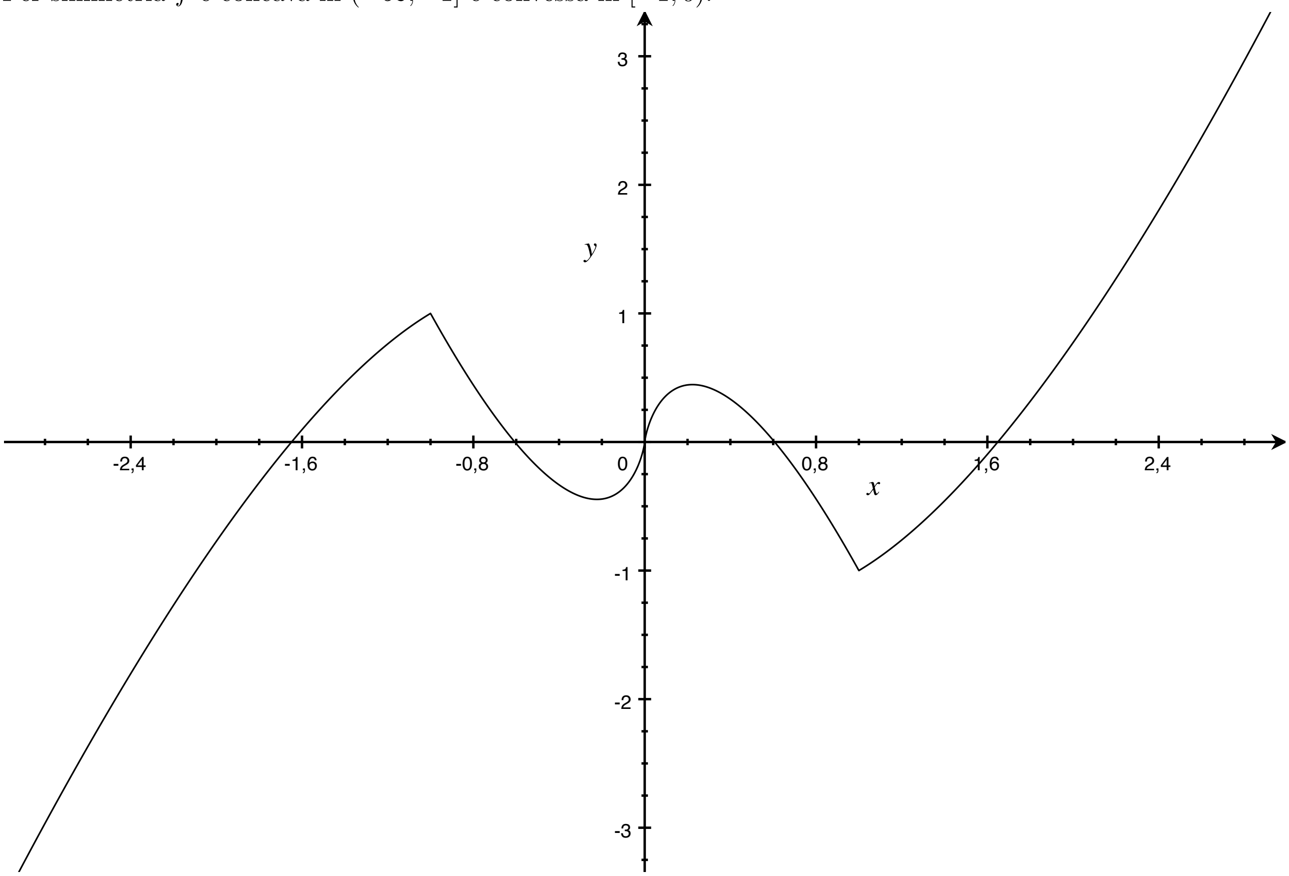
quindi se $x \in \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ risulta $f'(x) > 0$, mentre se $x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, 1\right)$ abbiamo che $f'(x) < 0$ e $f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 0$. Se invece $x \in (1, +\infty)$ avremo che

$$f'(x) > 0 \iff 2\log x + 1 > 0$$

disuguaglianza sempre vera, dato che se $x \in (1, +\infty)$ allora $\log x > 0$.
Riassumendo, avremo che f è strettamente crescente nell'intervallo $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$, strettamente decrescente in $\left[e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[1, +\infty)$. Per simmetria avremo che f è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty, -1]$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left[-1, -e^{-\frac{3}{2}}\right]$ e strettamente crescente in $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, 0\right)$. Il punto di ascissa $x = -1$ è di massimo locale, $x = -e^{-\frac{3}{2}}$ è di minimo locale, $x = e^{-\frac{3}{2}}$ è di massimo locale e $x = 1$ è di minimo locale.
Calcoliamo ora la derivata seconda per vedere la convessità.

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{se } x \in (0,1) \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

quindi $f''(x) > 0$ se $x \in (0,1)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (1, +\infty)$. La funzione è quindi concava in $(0, 1]$ e convessa in $[1, +\infty)$. Per simmetria f è concava in $(-\infty, -1]$ e convessa in $[-1, 0)$.



Esercizio 2

$$\int x^{\log x - 1} \log x \, dx$$

Soluzione

Osserviamo che

$$x^{\log x - 1} = x^{\log x} x^{-1} = \frac{x^{\log x}}{x} = \frac{e^{\log^2 x}}{x}.$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale otteniamo

$$\int x^{\log x - 1} \log x \, dx = \int \frac{e^{\log^2 x}}{x} \log x \, dx.$$

Eseguiamo ora la sostituzione

$$\log x = t, \qquad \frac{dx}{x} = dt$$

ottenendo

$$\int e^{t^2} t\, dt$$

e con l'ulteriore sostituzione

$$t^2 = s, \qquad 2t\, dt = ds$$

$$\int \frac{e^s}{2}\, ds = \frac{e^s}{2} + c.$$

Eseguendo ora tutte le sostituzioni inverse otteniamo

$$\int x^{\log x - 1} \log x\, dx = \frac{e^s}{2} + c = \frac{e^{t^2}}{2} + c = \frac{e^{\log^2 x}}{2} + c = \frac{(e^{\log x})^{\log x}}{2} + c = \frac{x^{\log x}}{2} + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ y(8) = -\dfrac{7}{3} - 2e^6. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine della forma

$$y' = a(x)y + b(x)$$

con

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}, \qquad b(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}.$$

Per prima cosa calcoliamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3x^{\frac{1}{3}}.$$

Ora calcoliamo

$$\int e^{-A(x)} b(x)\, dx = \int e^{-3x^{\frac{1}{3}}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Utilizzando la sostituzione

$$x^{\frac{1}{3}} = t, \qquad x = t^3, \qquad dx = 3t^2\, dt$$

otteniamo

$$\int e^{-3x^{\frac{1}{3}}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \int e^{-3t} t^{-1} 3t^2\, dt = 3 \int e^{-3t} t\, dt.$$

Eseguiamo l'integrazione per parti, derivando t e integrando e^{-3t}

$$3 \int e^{-3t} t\, dt = 3\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}t - \int -\frac{1}{3}e^{-3t}\, dt\right) = -e^{-3t}t - \frac{1}{3}e^{-3t} = -e^{-3t}\left(t + \frac{1}{3}\right) + c.$$

Sostituendo $t = x^{\frac{1}{3}}$ otteniamo che

$$\int e^{-A(x)} b(x)\, dx = -e^{-3x^{\frac{1}{3}}}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right) + c.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx = e^{3x^{\frac{1}{3}}}\left(-e^{-3x^{\frac{1}{3}}}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right) + c\right) = -\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right) + ce^{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Ricaviamo c dalla condizione iniziale $y(8) = -\frac{7}{3} - 2e^6$. Quindi avremo

$$-\frac{7}{3} - 2e^6 = y(8) = -\left(8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right) + c\, e^{3\cdot 8^{\frac{1}{3}}} = -\frac{7}{3} + ce^6.$$

Allora

$$ce^6 = -2e^6 \iff c = -2$$

e la soluzione del problema di Cauchy risulta

$$y(x) = -\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\right) - 2e^{3x^{\frac{1}{3}}}.$$