Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 12 giugno 2018

Domanda 1 $\lim_{x\to 0^+} (x - \sin x)^{\frac{1}{\log x}} =$ B

A) $+\infty$ B) e^3 C) 1 D) $\sqrt[6]{e}$

Domanda 2 La successione $a_n = \sqrt[n]{e^{n+\frac{1}{n}} - e^n}$ C

A) non ha né massimo né minimo B) è limitata inferiormente ma non superiormente

C) è limitata D) è limitata superiormente ma non inferiormente

Domanda 3 $\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-4}\,dx =$ A

A) $\frac{1}{4}\log\frac{48}{5}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ C) $-\frac{23}{60}$ D) $\frac{73}{60}$

Domanda 4 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y\cos x + \sin(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3. \end{cases}$ Allora $y(0) =$ C

A) -3 B) 3

C) $\frac{1}{e} - 2$ D) -1

Domanda 5 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y-2)^4 \\ y(1) = 1. \end{cases}$ Allora $y(0) =$ A

A) $2 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ B) $2 - \sqrt[3]{3}$

C) $2 - \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ D) 1

Domanda 6 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} e^{x^2\cos\frac{1}{x} + e^x - 1} & \text{se } x > 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{se } x \le 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$ A

A) è derivabile B) non è continua C) è continua ma non derivabile D) ha un punto di cuspide

Domanda 7 $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^7 e^{-t^4}\,dt =$ C

A) $+\infty$ B) -1

C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{7}$

Domanda 8 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 e^{-x^3}$ C

A) non è limitata superiormente B) ha minimo

C) ha massimo D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Domanda 9 Una primitiva della funzione $f(x) = \sin(2e^x)e^x$ è: D

A) $2\cos(2e^x)e^{2x} + \sin(2e^x)e^x$ B) $2\cos(2e^x)e^{2x}$

C) $\cos(2e^x)e^x$ D) $\frac{1}{2}\left(\sin^2(e^x) - \cos^2(e^x)\right)$

Domanda 10 La successione $a_n = \frac{1}{\sin(\frac{n^2\pi+1}{n})}$ C

A) è limitata ma non ha limite B) ha limite finito

C) non è limitata né superiormente né inferiormente D) diverge positivamente

codice 615838

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 12 giugno 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = x\sqrt[5]{\log x}$ determinandone insiemi di definizione, derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali, intervalli di concavità e convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ data la presenza del logaritmo ed è continua in tutto il suo insieme di definizione perché è prodotto e composizione di funzioni continue. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)^{\frac{1}{5}}}{x^{-1}} = (\text{de l'Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{5}(\log x)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{5}(\log x)^{-\frac{4}{5}} x = -\frac{1}{5}\frac{1}{-\infty}0 = 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

La funzione non ha quindi né asintoti orizzontali né verticali. Potrebbe avere un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{5}} = +\infty$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo.
La funzione non è limitata superiormente.
Vediamo ora la monotonia calcolando la derivata.

$$f'(x) = 1\cdot(\log x)^{\frac{1}{5}} + x\frac{1}{5}(\log x)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{x} = (\log x)^{-\frac{4}{5}}\left(\log x + \frac{1}{5}\right).$$

Ricordando che

$$(\log x)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\log^4 x}}$$

otteniamo che tale quantità è sempre maggiore di 0 e non è definita per $x = 1$. Nel punto $x = 1$, dato che la funzione è continua, otteniamo che

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{\log 1 + \frac{1}{5}}{\sqrt[5]{\log^4 1}} = \frac{\frac{1}{5}}{0^+} = +\infty.$$

Nel punto $x = 1$ la funzione non è quindi derivabile e ha retta tangente verticale. Per quanto detto sopra avremo che

$$f'(x) > 0 \iff \log x + \frac{1}{5} > 0 \iff \log x > -\frac{1}{5} \iff x > e^{-\frac{1}{5}}.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $\left(0, e^{-\frac{1}{5}}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[e^{-\frac{1}{5}}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = e^{-\frac{1}{5}}$ è punto di minimo locale e assoluto. Il minimo della funzione vale

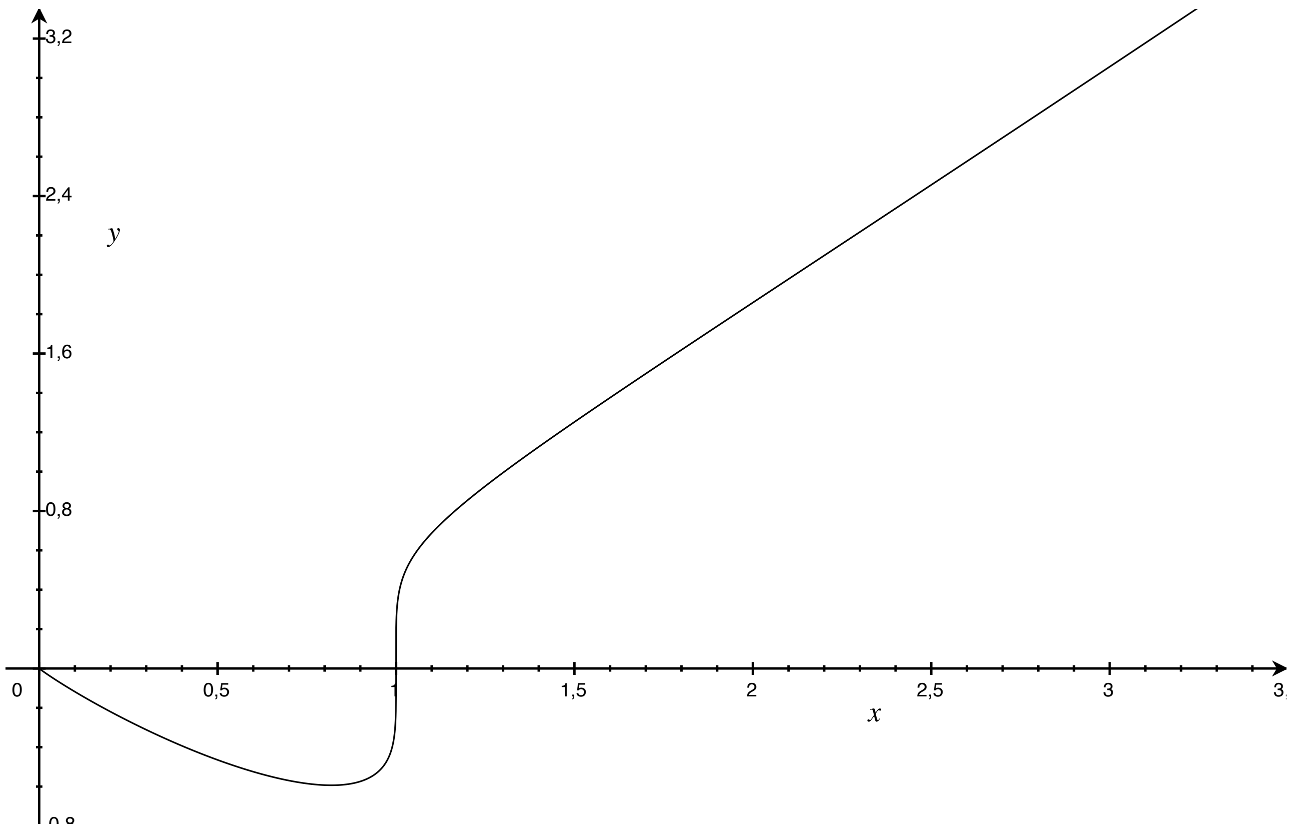
$$f(e^{-\frac{1}{5}}) = e^{-\frac{1}{5}}\left(\log e^{-\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{-\frac{1}{5}}\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{5e}}.$$

Calcoliamo la derivata seconda per vedere la convessità.

$$f''(x) = -\frac{4}{5}(\log x)^{-\frac{9}{5}}\frac{1}{x}\left(\log x + \frac{1}{5}\right) + (\log x)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{x} = (\log x)^{-\frac{9}{5}}\frac{1}{x}\left(-\frac{4}{5}\log x - \frac{4}{25} + \log x\right)$$

$$= (\log x)^{-\frac{9}{5}}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{5}\log x - \frac{4}{25}\right) = (\log x)^{-\frac{9}{5}}\frac{1}{5x}\left(\log x - \frac{4}{5}\right).$$

Osserviamo nuovamente che
$$(\log x)^{-\frac{9}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\log^9 x}}$$
quindi la derivata seconda non è definita per $x = 1$, dove la funzione non è derivabile. In tutti gli altri punti esiste la derivata seconda. Osserviamo anche che
$$\frac{1}{\sqrt[5]{\log^9 x}} > 0 \iff \log x > 0 \iff x > 1,$$
$$\log x - \frac{4}{5} > 0 \iff \log x > \frac{4}{5} \iff x > e^{\frac{4}{5}}.$$
Dato che $\frac{1}{x} > 0$ in tutto l'insieme di definizione della funzione, otteniamo che
$$f''(x) > 0 \iff x \in (0,1) \cup \left(e^{\frac{4}{5}}, +\infty\right), \quad f''(x) < 0 \iff x \in \left(1, e^{\frac{4}{5}}\right), \qquad f''(e^{\frac{4}{5}}) = 0.$$
La funzione è convessa in $(0,1]$, concava in $[1, e^{\frac{4}{5}}]$ e convessa in $[e^{\frac{4}{5}}, +\infty)$. I punti di ascissa $x = 1$ e $x = e^{\frac{4}{5}}$ sono punti di flesso.



Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\log(x+3)}{x^2}\, dx$.

Soluzione

Eseguiamo l'integrale indefinito per parti integrando $\frac{1}{x^2}$ e derivando $\log(x+3)$:
$$\int \frac{\log(x+3)}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\log(x+3) - \int -\frac{1}{x}\frac{1}{x+3}\, dx = -\frac{1}{x}\log(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x}\log(x+3) + \frac{1}{3}\log\left|\frac{x}{x+3}\right| + c.$$
Ora calcoliamo l'integrale definito utilizzando il teorema di Torricelli:
$$\int_{-2}^{-1} \frac{\log(x+3)}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\log(x+3) + \frac{1}{3}\log\left|\frac{x}{x+3}\right|\right]_{-2}^{-1} = 1\log 2 + \frac{1}{3}\log\left|\frac{-1}{2}\right| - \left(\frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{3}\log\left|\frac{-2}{1}\right|\right)$$
$$= \log 2 + \frac{1}{3}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log 2 = \log 2 - \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 2 = \frac{1}{3}\log 2.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 16y = e^{4x}(32x + 72) \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = -11. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare, del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea. Risolviamo prima l'omogenea

$$y'' + 16y = 0$$

alla quale è associato il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 16 = 0$$

che non ha radici reali, dato che $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 16 = -64 < 0$. Le soluzioni dell'omogenea saranno quindi del tipo

$$y_0 = e^{-\frac{a}{2}x} \left(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)\right)$$

dove a è il coefficiente di y', quindi in questo caso $a = 0$, e $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$. Abbiamo quindi

$$y_0(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati. Cercheremo quindi una soluzione della forma

$$\bar{y} = e^{4x}(Ax + B).$$

Deriviamo due volte per ottenere

$$\bar{y}' = 4e^{4x}(Ax + B) + e^{4x}A = e^{4x}(4Ax + 4B + A),$$

$$\bar{y}'' = 4e^{4x}(4Ax + 4B + A) + e^{4x}4A = e^{4x}(16Ax + 16B + 8A).$$

Sostituendo nell'equazione completa, otteniamo

$$e^{4x}(16Ax + 16B + 8A) + 16e^{4x}(Ax + B) = e^{4x}(32x + 72).$$

Dividendo per e^{4x} abbiamo

$$32Ax + 32B + 8A = 32x + 72.$$

Uguagliando i coefficienti dei monomi dello stesso grado, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 32A & = 32 \\ 8A + 32B & = 72 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = 1,\ B = 2$. La soluzione particolare cercata è quindi

$$\bar{y} = e^{4x}(x + 2).$$

La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione dell'omogenea con la soluzione particolare

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + e^{4x}(x + 2).$$

Determiamo i coefficienti c_1 e c_2 utilizzando le condizioni iniziali. Avremo

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + e^0(0 + 2) = c_1 + 2.$$

Derivando la soluzione otteniamo

$$y' = -4c_1 \sin(4x) + 4c_2 \cos(4x) + 4e^{4x}(x + 2) + e^{4x}$$

$$y'(0) = 4c_2 + 4 \cdot 2 + 1 = 4c_2 + 9.$$

Dalle condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + 2 & = 6 \\ 4c_2 + 9 & = -11 \end{cases}$$

che ha come soluzione $c_1 = 4,\ c_2 = -5$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y = 4\cos(4x) - 5\sin(4x) + e^{4x}(x + 2).$$