Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 6 aprile 2018

Domanda 1 Sia $f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)x\sin\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) non ha derivata in $x=0$ B) è derivabile C) ha un punto di cuspide D) ha un punto angoloso

B

Domanda 2
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 7x^4 + 5|x|^{\frac{5}{2}}}{e^{(x^4)} - e^{(-x^4)}} =$$

A) 0 B) $\dfrac{7}{2}$ C) $+\infty$ D) non esiste

C

Domanda 3 L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |\cos x| \geq 1\}$

A) è limitato superiormente ma non inferiormente B) non è limitato

C) è limitato inferiormente ma non superiormente D) è limitato

B

Domanda 4
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^6+n^3} - \sqrt[3]{n^6-n^3}\right) n =$$

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $+\infty$ C) 0 D) $\dfrac{5}{6}$

A

Domanda 5
$$\lim_{n\to+\infty} (2n)! - e^n (n!)^2 =$$

A) $-\infty$ B) $\dfrac{1}{e}$ C) $+\infty$ D) e^e

C

Domanda 6 La funzione $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{\log(1+t^4)}{t^2+1}\, dt & \text{se } x \leq 1 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

A) è derivabile B) non è continua C) ha un punto di cuspide D) ha un punto angoloso

D

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\tan(3x)}{\cos(3x)}\, dx =$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$ C) $\dfrac{\log 2}{2}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

B

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\, dx =$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $1 - \dfrac{\pi}{4}$ C) $\dfrac{2-\pi}{4}$ D) $\dfrac{1-\log 2}{2}$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y+3)^3 \\ y(0) = -2. \end{cases}$ Allora $y\left(-\dfrac{3}{2}\right) =$

A) -2 B) $-\dfrac{5}{2}$

C) $\sqrt{\dfrac{1}{2}} - 3$ D) $-\dfrac{1}{2}$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale $y' = y + e^{3x}$. Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

A) 0 B) dipende dalla soluzione scelta

C) $+\infty$ D) $\dfrac{1}{2}$

C

codice 940639

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 6 aprile 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log(x^2-1) - |x-3|$ determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), eventuali punti di discontinuità e di non derivabulità, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente positivo,quindi se

$$x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Osserviamo ora che l'argomento del valore assoluto cambia segno per $x = 3$ quindi avremo che

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2-1) + x - 3 & \text{se } x < 3 \\ \log(x^2-1) - x + 3 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione, perché composizione e somma di funzioni continue.

Cerchiamo ora gli eventuali asintoti calcolando i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(x^2-1) + x - 3 = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\log(x^2-1)}{x} + 1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty(0+1-0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \log(x^2-1) + x - 3 = \log(0^+) - 1 - 3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \log(x^2-1) - x + 3 = \log(0^+) - 1 + 3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(x^2-1) - x + 3 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\log(x^2-1)}{x} - 1 + \frac{3}{x}\right) = \infty(0-1-0) = -\infty.$$

Da questi risultati otteniamo che la funzione ha due asintoti verticali di equazione rispettivamente $x = -1$ e $x = 1$, non ha asintoti orizzontali. Inoltre la funzione non è inferiormente limitata, quindi non ha minimo. Ha invece sicuramente massimo e in particolare un punto di massimo locale nella semiretta $(-\infty, -1)$ e un altro nella semiretta $(1, +\infty)$. Li determineremo con il calcolo della derivata. Vediamo ora se ci sono asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2-1) + x - 3}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x} + 1 - \frac{3}{x} = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \log(x^2-1) + x - 3 - x = \lim_{x\to-\infty} \log(x^2-1) - 3 = +\infty$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-1) - x + 3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x} - 1 + \frac{3}{x} = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-1)\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \log(x^2-1) - x + 3 + x = \lim_{x\to-\infty} \log(x^2-1) + 3 = +\infty$$

e anche in questo caso non c'è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Osserviamo ora che la funzione è somma e composizione di funzioni derivabili, eccetto il valore assoluto che non è derivabile quando l'argomento si annulla. Risulta quindi che la funzione è sicuramente derivabile per $x \neq 3$. Verificheremo l'eventuale derivabilità per $x = 3$ in seguito. Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1} + 1 = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} & \text{se } x < 3 \\[2ex] \dfrac{2x}{x^2-1} - 1 = \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2-1} & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

Considerando anche il dominio della funzione avremo quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} & \text{se } x \in (-\infty,-1) \cup (1,3) \\ \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2-1} & \text{se } x \in (3,+\infty). \end{cases}$$

Esaminiamo prima il caso $x \in (-\infty,-1) \cup (1,3)$. Il denominatore è positivo mentre per il numeratore abbiamo

$$x^2+2x-1 > 0 \iff x \in (-\infty,-1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2},+\infty).$$

Di nuovo intersecando con il dominio, otteniamo

$$f'(x) > 0 \text{ se } x \in \left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right) \cup (1,3),\ f'(x) < 0 \text{ se } x \in (-1-\sqrt{2},-1),\ f'\left(-1-\sqrt{2}\right) = 0.$$

Vediamo ora il caso $x \in (3,+\infty)$. Nuovamente il denominatore è positivo. Per il numeratore abbiamo

$$-x^2+2x+1 > 0 \iff x \in \left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right).$$

Dato che $1+\sqrt{2} < 3$ risulta

$$f'(x) < 0\ \forall x\ \in (3,+\infty).$$

Riassumendo otteniamo che f è strettamente crescente in $(-\infty,-1-\sqrt{2}]$, strettamente decrescente in $[-1-\sqrt{2},-1)$, strettamente crescente in $(1,3]$ e strettamente decrescente in $[3,+\infty)$. I punti di ascissa $x=-1-\sqrt{2}$ e $x=3$ sono di massimo locale; confrontiamo il valore assunto dalla funzione in tali punti per determinare il massimo di f.

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right) = \log\left(2+2\sqrt{2}\right) - 4 - \sqrt{2}, \quad f(3) = \log 8.$$

Verifichiamo che $f\left(-1-\sqrt{2}\right) < f(3)$, infatti

$$\log\left(2+2\sqrt{2}\right) - 4 - \sqrt{2} < \log 8 \iff \log\left(2+2\sqrt{2}\right) - \log 8 < 4+\sqrt{2} \iff \log\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{8}\right) < 4+\sqrt{2}$$

che è sicuramente vera dato che $\frac{2+2\sqrt{2}}{8} < 1$, quindi il lato sinistro della disuguaglianza è negativo mentre il lato destro è positivo. Ne risulta che

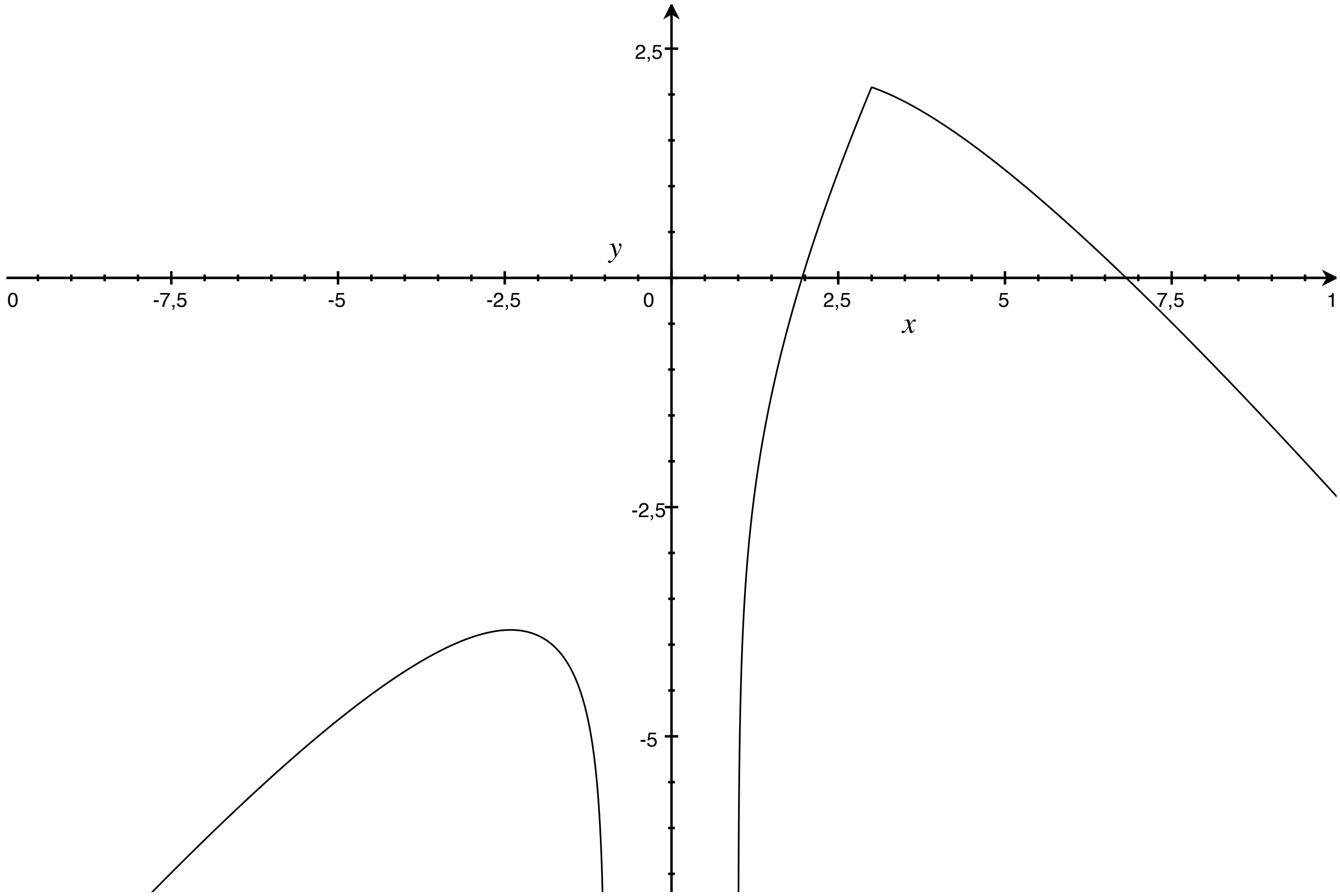
$$\max(f) = f(3) = \log 8.$$

Vediamo ora se la funzione è derivabile in $x=3$. Dato che f è continua in $x=3$ possiamo calcolare le derivate destra e sinistra facendo il limite della derivata.

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{9+6-1}{9-1} = \frac{7}{4}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{-x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{-9+6+1}{9-1} = -\frac{1}{4}.$$

La funzione non è quindi derivabile in $x=3$ dove presenta un punto angoloso.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\, dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima una primitiva della funzione $x\cos^2 x$ integrando per parti. Integreremo $\cos x$ e deriveremo $x\cos x$.

$$\int x\cos^2 x\, dx = \int (\cos x)\,(x\cos x)\, dx = \sin x\, x\cos x - \int \sin x(\cos x - x\sin x)\, dx$$
$$= x\cos x\sin x - \int \cos x\sin x\, dx + \int x\sin^2 x\, dx = x\cos x\sin x - \int \frac{\sin(2x)}{2}\, dx + \int x(1-\cos^2 x)\, dx$$
$$= x\cos x\sin x - \frac{1}{2}\frac{-\cos(2x)}{2} + \int x\, dx - \int x\cos^2 x\, dx = x\cos x\sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2} - \int x\cos^2 x\, dx.$$

Avendo ottenuto di nuovo l'integrale di partenza con il segno opposto, possiamo portarlo al primo membro ottenendo, a meno di costanti additive,

$$2\int x\cos^2 x\, dx = x\cos x\sin x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Allora risulta

$$\int x\cos^2 x\, dx = \frac{x\cos x\sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}.$$

Per calcolare l'integrale definito basta applicare il teorema di Torricelli ottenendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\, dx = \left[\frac{x\cos x\sin x}{2} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{0}{8} + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{16} - \left(0 - \frac{1}{8} + 0\right) = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Trovare poi l'insieme di definizione della soluzione e calcolare l'area compresa fra il grafico e la retta di equazione $y = 0$.

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili. Avremo quindi

$$\int y\, dy = \int -x\, dx + c.$$

Integrando otteniamo

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \iff y^2 + x^2 = 2c.$$

Ricaviamo ora la costante c dalla condizione iniziale $y(0) = 1$

$$1 + 0 = 2c$$

quindi

$$y^2 + x^2 = 1.$$

Ricavando la y dobbiamo tenere conto del fatto che $y(0) = 1 > 0$. Sceglieremo quindi la radice positiva, ottenendo

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

L'insieme di definizione della soluzione sarebbe $x \in [-1, 1]$ ma dobbiamo escludere i punti $x = -1$ e $x = 1$ perché i tali punti la funzione non è derivabile e $y = 0$ renderebbe priva di senso l'equazione differenziale. Quindi la soluzione è definita per $x \in (-1, 1)$.

Per calcolare l'area dovremmo valutare

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

ma possiamo calcolare questo integrale per via elementare, osservando che il grafico della funzione rappresenta una semicirconferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Avremo quindi

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$