Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 12 febbraio 2018

Domanda 1 $$\lim_{x\to 0} (\log(e+x))^{\frac{1}{\sqrt{1+2x}-1}} =$$

A) 1 B) $\frac{1}{e}$ C) $e^{\frac{1}{e}}$ D) ∞

C

Domanda 2 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{x+\frac{1}{x}} - e^{x-\frac{1}{x}}}{x}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) è limitata superiormente ma non ha minimo D) ha sia massimo che minimo

A

Domanda 3 La derivata della funzione $f(x) = (\sin x)^{\sin^2 x}$ è

A) $(\sin x)^{(\sin^2 x)-1}\log(\sin x)$ B) $(\sin x)^{\sin^2 x}\cos x \sin x\,(2\log(\sin x)+1)$
C) $(\cos x)^{2\sin x\cos x}$ D) $(\sin x)^{\sin^2 x}\cos x$

B

Domanda 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{n!} =$

A) $+\infty$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{e}$

A

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{n^3+8(-1)^n}{3^n}$

A) non è limitata superiormente B) ha sia massimo che minimo
C) è debolmente decrescente D) non ha limite

B

Domanda 6 $$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{n(-1)^n} =$$

A) non esiste B) 1 C) $+\infty$ D) 0

D

Domanda 7 La funzione $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{3} \log(1+t^2)\,dt$

A) ha un solo punto di flesso B) ha esattamente due punti di flesso
C) è convessa in tutto $\mathbb{R}$ D) è concava in tutto $\mathbb{R}$

D

Domanda 8 $$\int_{-1}^{2} x^3 e^{x^2}\,dx =$$

A) e^2 B) $\frac{3e^4}{2}$ C) $4e^4-\frac{e}{4}$ D) $46e^2-5e$

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''+8y'+20y=0\\ y(0)=-3\\ y'(0)=16.\end{cases}$ Calcolare $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

A) 8 B) $-\frac{2}{e}$ C) $2e^4$ D) $\frac{2}{e^\pi}$

D

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y\log y\\ y(2)=e.\end{cases}$ Calcolare $y(3)$.

A) $e^{(e^{3-e}\log 2)}$ B) $e^{(e^3)}$ C) e^e D) $e^{\sqrt{2}}$

C

codice 140073

Analisi Matematica A

Pisa, 12 febbraio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$, determinandone insieme di definizione, punti di discontinuità, di non derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dato che la quantità sotto radice è sempre maggiore o uguale a zero. La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione, essendo somma e composizione di funzioni continue. Osserviamo che

$$x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{se } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x + \sqrt{1 - x^2} & \text{se } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to -\infty} x - x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \end{aligned}$$

siamo quindi in presenza di un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = +\infty + \infty = +\infty$$

quindi la funzione non è superiormente limitata. Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = 1 + \sqrt{1} = 2;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x \\ &= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

La funzione ha quindi un asintoto obliquo di equazione $y = 2x$ per $x \to +\infty$.

Calcoliamo ora la derivata. Se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ avremo

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

se invece $x \in (-1, 1)$, sarà

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Studiamo il segno, distinguendo i due casi. Se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} + x \geq 0 \iff \sqrt{x^2 - 1} \geq -x.$$

A questo punto occorre distinguere due ulteriori casi. Se $x \in (-\infty, -1)$ allora $-x > 0$, quindi possiamo elevare al quadrato e l'ultima disuguaglianza diventa

$$x^2 - 1 \geq x^2$$

che è sempre falsa. Ne consegue che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1)$. Se invece $x \in (1, +\infty)$ avremo $x > 0$ quindi

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq -x$$

è banalmente sempre vera perché il lato sinistro della disuguaglianza è positivo mentre quello destro è negativo. In realtà possiamo anche dire che vale la disuguaglianza stretta poiché $-x < -1 < 0$. Allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$.

Nel caso $x \in (-1, 1)$ avremo

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Per lo studio del segno otteniamo

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt{1 - x^2} - x > 0 \iff \sqrt{1 - x^2} > x.$$

Osserviamo che se $x \in (-1, 0)$ allora il lato destro è negativo mentre il lato sinistro è sempre maggiore o uguale a zero, quindi la disuguaglianza è sempre vera. Se invece $x \in [0, 1)$ possiamo elevare al quadrato ottenendo

$$1 - x^2 > x^2 \iff 1 > 2x^2 \iff \frac{1}{2} > x^2 \iff x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Quindi abbiamo $f'(x) > 0$ se $x \in \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Raccogliendo tutti i risultati otteniamo che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, -1]$, strettamente crescente in $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ e strettamente crescente in $[1, +\infty)$. I punti di ascissa $x = -1$ e $x = 1$ sono di minimo locale mentre il punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è di massimo locale. Valutiamo la funzione nei due punti di minimo

$$f(-1) = -1, \qquad f(1) = 1$$

e otteniamo che -1 è il minimo della funzione.

Resta solo da stabilire se nei punti $x = -1$ e $x = 1$ la funzione è derivabile. Dato che la funzione è continua, proviamo a verificare la derivabilità facendo il limite della derivata

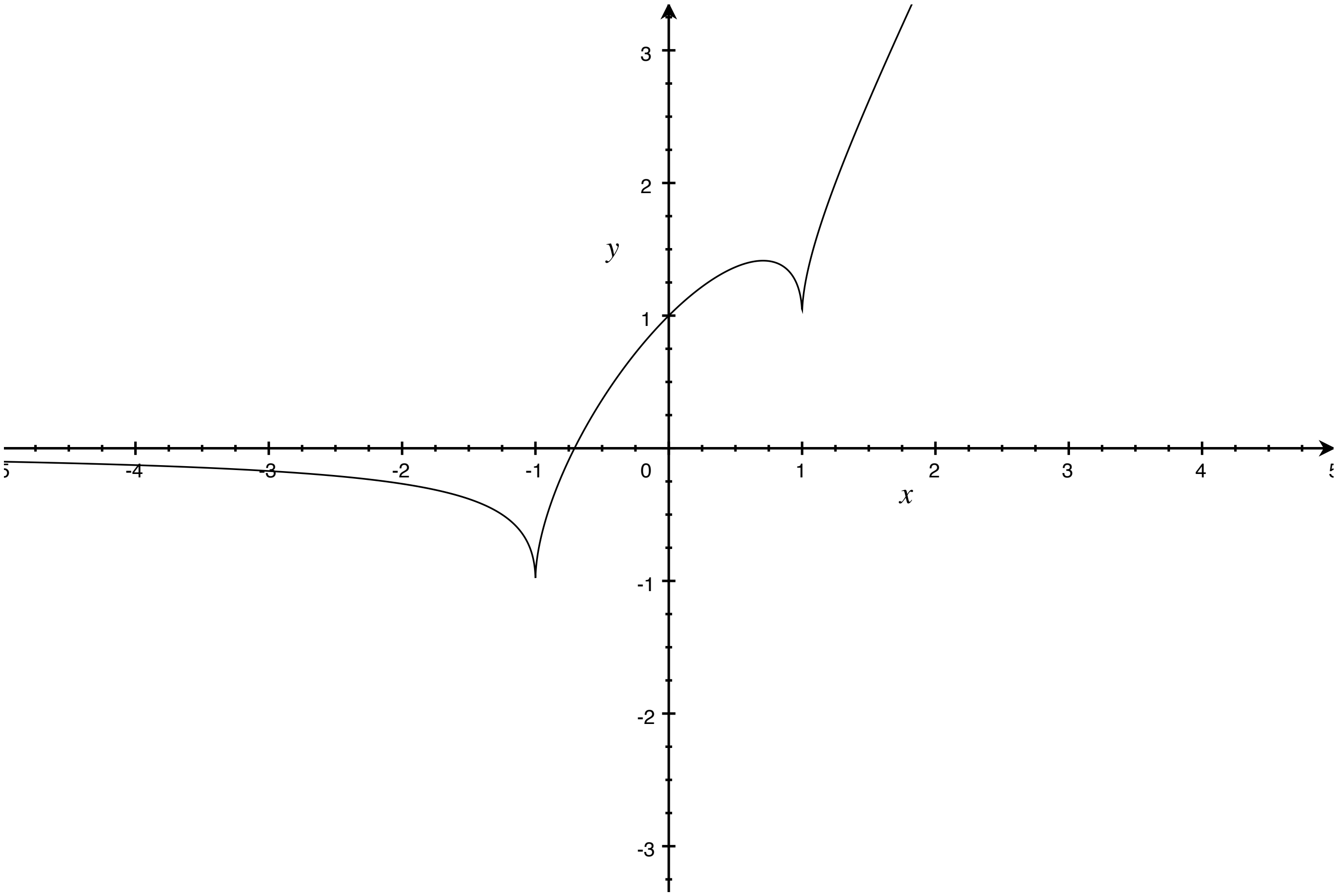
$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

I punti $x = -1$ e $x = 1$ sono quindi punti di cuspide.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Soluzione

Eseguiamo l'integrale con la sostituzione $\sqrt{1+x^2}=t$ in modo che $1+x^2=t^2$ quindi $x^2=t^2-1$ e, scegliendo la radice positiva per rendere la trasformazione biunivoca, $x=\sqrt{t^2-1}$. Il differenziale diventa

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}, \qquad dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt.$$

Ne segue che

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 t\,\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\int(t^2-1)t^2\,dt=\int t^4-t^2\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+c=\frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+c.$$

Esercizio 3 Risolvere, per $x>0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{1+x}{x}y+x-x^2 \\ y(1)=\alpha \end{cases}$$

Determinare, per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la soluzione è limitata inferiormente.

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)$$

con

$$a(x) = \frac{1+x}{x}, \qquad b(x) = x - x^2.$$

Troviamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{1+x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} + 1\,dx = \log|x| + x = \log x + x$$

dato che $x > 0$. L'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)} b(x)\,dx + c \right).$$

Procediamo quindi a calcolare

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-(\log x + x)}(x - x^2)\,dx = \int \frac{1}{x} e^{-x}(x - x^2)\,dx = \int e^{-x}(1-x)\,dx$$
$$= -e^{-x}(1-x) - \int -e^{-x}(-1)\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - (-e^{-x}) + c = xe^{-x} + c.$$

L'integrale generale è quindi

$$y(x) = e^{\log x + x}\left(xe^{-x} + c\right) = xe^x\left(xe^{-x} + c\right) = x^2 + cxe^x.$$

Ricaviamo ora la costante c in funzione del parametro α:

$$\alpha = y(1) = 1 + ce \iff ce = \alpha - 1 \iff c = \frac{\alpha - 1}{e}.$$

La soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$$y(x) = x^2 + \frac{\alpha - 1}{e} xe^x.$$

Osserviamo ora che la soluzione è continua per $x \in (0, +\infty)$ e che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$$

per ogni valore di α. Risulta invece

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Ne consegue che la soluzione è inferiormente limitata se e solo se $\alpha \geq 1$.