Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 16 gennaio 2018

Domanda 1 La funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, nel suo insieme di definzione

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) è debolmente crescente D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

D

Domanda 2 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - \dfrac{1}{x} < 0\right\}$

A) è limitato superiormente ma non inferiormente B) è limitato inferiormente ma non superiormente

C) non è limitato né inferiormente né superiormente D) è limitato

D

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan x + e^{\arctan x}$

A) non è né iniettiva né surgettiva B) è iniettiva ma non surgettiva

C) è surgettiva ma non iniettiva D) è bigettiva

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{e^{n! \tan(n\pi)} - 1 + n^2 \sin n}{\log(1 + 3^{n \log n}) \log(n + 5^n)}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) non ha né massimo né minimo

C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

C

Domanda 5 La successione $a_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^3+1}$, definita per $n \geq 1$

A) non ha né massimo né minimo B) ha sia massimo che minimo

C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 6 La successione $a_n = n^{\sin(\cos(\frac{n\pi}{2}))}$, definita per $n \geq 1$

A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata superiormente ma non ha massimo

C) non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(3x)\, dx =$

A) 3π B) $\dfrac{\pi}{3}$

C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{9}$

B

Domanda 8 $\displaystyle\int_{-1}^{2} x e^{|x|}\, dx =$

A) $e^2 + \dfrac{1}{e^2}$ B) $2e^2 - \dfrac{e}{2}$

C) $2e^2 + \dfrac{1}{2e}$ D) e^2

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y \log x \\ y(1) = 0. \end{cases}$ Allora $y(2) =$

A) $\log 2 - \log 4$ B) $\log 2 + \log(\log 2)$

C) $-\log 2$ D) $-\log(2 - 2\log 2)$

D

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (\log x + 1)y + x^x \\ y(1) = 2. \end{cases}$ Allora $y(2) =$

A) 8 B) 12

C) 3 D) $e^3 + 1$

B

codice 402138

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 16 gennaio 2018

Domanda 1 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - \frac{1}{x} < 0\right\}$

A) non è limitato né inferiormente né superiormente B) è limitato inferiormente ma non superiormente
C) è limitato superiormente ma non inferiormente D) è limitato

D

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{e^{n!\tan(n\pi)} - 1 + n^2 \sin n}{\log(1 + 3^{n \log n}) \log(n + 5^n)}$

A) ha sia massimo che minimo B) ha minimo ma non ha massimo C) ha massimo ma non ha minimo
D) non ha né massimo né minimo

A

Domanda 3 La successione $a_n = n^{\sin(\cos(\frac{n\pi}{2}))}$, definita per $n \geq 1$

A) ha minimo ma non ha massimo
B) ha massimo ma non ha minimo C) non ha né massimo né minimo
D) è limitata superiormente ma non ha massimo

C

Domanda 4 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan x + e^{\arctan x}$

A) è surgettiva ma non iniettiva B) è bigettiva C) è iniettiva ma non surgettiva
D) non è né iniettiva né surgettiva

C

Domanda 5 Sia $z = (\sqrt{3} - 3i)$. Allora $z^4 + \overline{z}^4 =$

A) $72\sqrt{3}\, i$ B) -144
C) 72 D) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

B

Domanda 6 La funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, nel suo insieme di definzione

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) è limitata inferiormente ma non ha minimo D) è debolmente crescente

C

Domanda 7 L'equazione a valori complessi $|z - 1| = |z - i|$

A) ha esattamente due soluzioni B) ha infinite soluzioni
C) ha una sola soluzione D) non ha soluzioni

B

Domanda 8 $\displaystyle\int_{-1}^{2} x e^{|x|}\, dx =$

A) $e^2 + \dfrac{1}{e^2}$ B) e^2 C) $2e^2 - \dfrac{e}{2}$
D) $2e^2 + \dfrac{1}{2e}$

B

Domanda 9 La successione $a_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^3+1}$, definita per $n \geq 1$

A) non ha né massimo né minimo B) ha sia massimo che minimo
C) ha massimo ma non ha minimo D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 10 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \sin(3x)\, dx =$

A) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{9}$
B) 3π C) $\dfrac{1}{9}$ D) $\dfrac{\pi}{3}$

D

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 16 gennaio 2018

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = |x|e^{\frac{1}{x-1}}$ determinandone insieme di definizione, di continuità e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estermi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $x \neq 1$, quindi nell'insieme $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ e in tale insieme è continua, in quanto composizione e prodotto di funzioni continue. Calcoliamo ora i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = |-\infty|e^{\frac{1}{-\infty}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1\, e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = |+\infty|e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale (da destra) di equazione $x = 1$. La funzione non è superiormente limitata e potrebbe avere asintoti obliqui. Data la presenza del valore assoluto, la funzione ha la seguente espressione

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ xe^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-xe^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x-1}} = -e^{\frac{1}{-\infty}} = -e^0 = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x\to-\infty} -xe^{\frac{1}{x-1}} + x = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - e^{\frac{1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x-1} + o\left(\frac{x}{x-1}\right) = -1$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$ con la sostituzione $t = \frac{1}{x-1}$ e $x \to -\infty$. Siamo quindi in presenza di un asintoto obliquo di equazione $y = -x - 1$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x-1}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} + o\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1.$$

Abbiamo quindi anche l'asintoto obliquo $y = x + 1$ per $x \to +\infty$.

Calcoliamo ora la derivata, osservando che la funzione è sicuramente derivabile nel suo dominio di definizione eccettuato al più il punto $x = 0$. Per $x < 0$ risulta

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x-1}} - xe^{\frac{1}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-1}}\left(-1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-1}}\frac{x-(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}(-x^2 + 3x - 1).$$

Il segno della derivata è determinato da quello del trinomio $-x^2+3x-1$. Risulta

$$-x^2+3x-1=0 \iff x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{-2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Dato che $\frac{3-\sqrt{5}}{2}>0$ risulta $f'(x)<0$ per ogni $x<0$, quindi la funzione è decrescente su tutta la semiretta $(-\infty,0]$. Il calcolo della derivata per $x>0$ si ricava facilmente da quello appena fatto ottenendo

$$f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}(x^2-3x+1).$$

In questo caso avremo che

$$f'(x)>0 \iff x\in\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right).$$

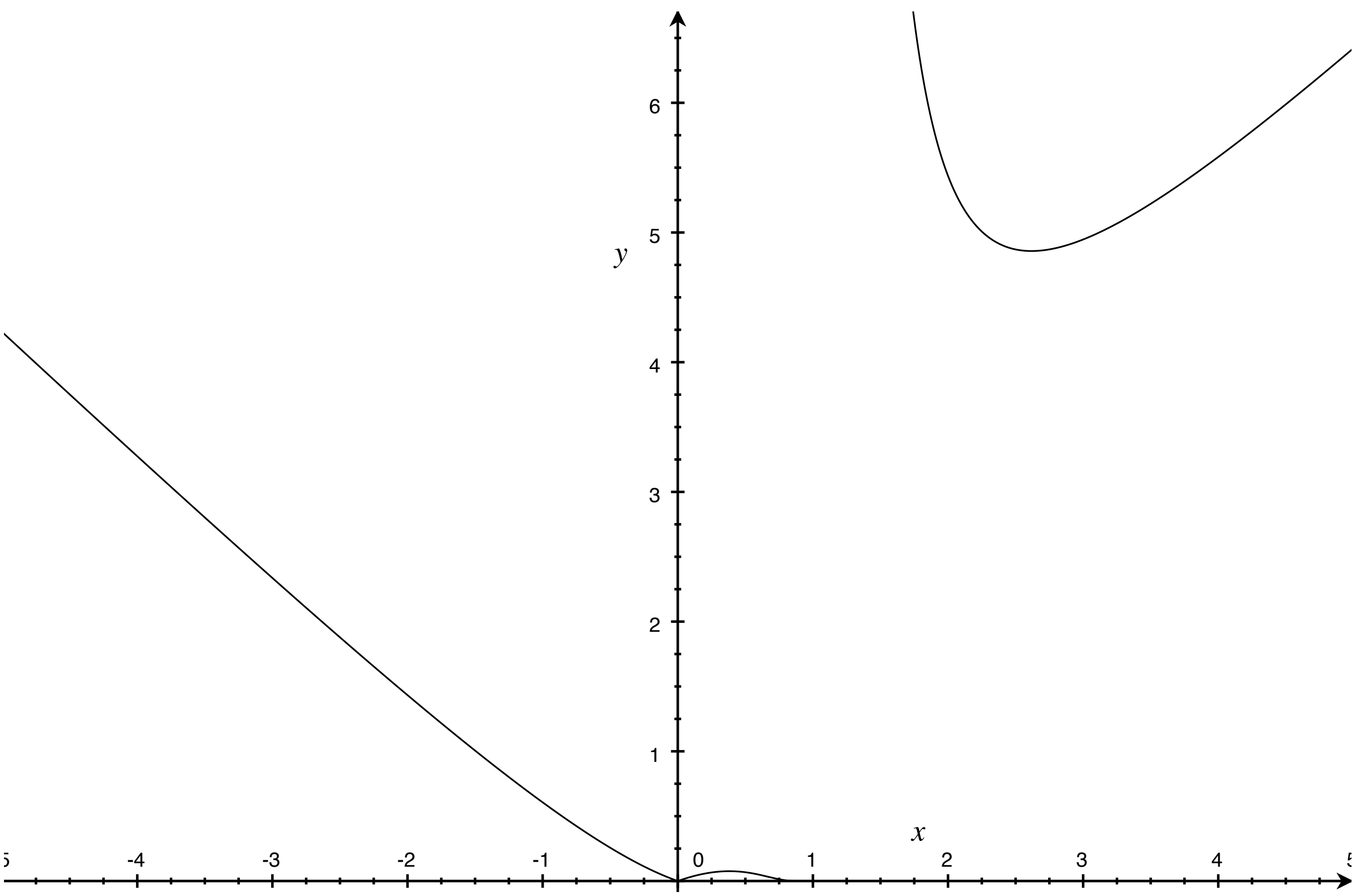
La funzione è quindi crescente in $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, decrescente in $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)$, ancora decrescente in $\left(1,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ e infine crescente in $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$. Il punto $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è di massimo locale e $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è di minimo locale. Sempre dallo studio della monotonia otteniamo che il punto $x=0$ è di minimo locale, inoltre, dato che $f(x)\geq 0$ per ogni $x\neq 1$ e che $f(0)=0$ otteniamo che 0 è il minimo della funzione.

Verifichiamo ora la derivabilità in $x=0$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xe^{\frac{1}{x-1}}-0}{x}=-e^{-1}=-\frac{1}{e},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{\frac{1}{x-1}}-0}{x}=e^{-1}=\frac{1}{e},$$

la funzione ha quindi un punto angoloso in $x=0$.



Esercizio 2 Determinare una primitiva della funzione $f(x)=x^3\arctan(x^2)$.

Soluzione

Effettuiamo la sostituzione

$$x = t^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

ottenendo

$$\int x^3 \arctan(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} (\arctan t)\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \int t \arctan t\, dt.$$

Eseguiamo l'ultimo integrale per parti, integrando t e derivando $\arctan t$

$$\int t \arctan t\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} (t - \arctan t) + c = \frac{1}{2} \big((t^2+1) \arctan t\ - t\big) + c.$$

Quindi, eseguendo la sostituzione inversa $t = x^2$, abbiamo

$$\int x^3 \arctan(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int t \arctan t\, dt = \frac{1}{4} \big((t^2+1) \arctan t\ - t\big) + c = \frac{1}{4} \big((x^4+1) \arctan(x^2)\ - x^2\big) + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = 39 \cos x + 37 \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è lineare, del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Esaminiamo l'omogenea associata

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16$$

che ha la sola radice $\lambda = -4$ con molteplicità 2. Quindi l'integrale generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Il termine noto è di tipo trigonometrico, quindi non siamo in presenza di risonanza. Cercheremo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y} = A \cos x + B \sin x.$$

Derivando due volte abbiamo

$$\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x, \qquad \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$-A \cos x - B \sin x + 8(-A \sin x + B \cos x) + 16(A \cos x + B \sin x) = 39 \cos x + 37 \sin x,$$

quindi

$$(-A + 8B + 16A) \cos x + (-B - 8A + 16B) \sin x = 39 \cos x + 37 \sin x$$

che genera il sistema lineare

$$\begin{cases} 15A + 8B = 39 \\ -8A + 15B = 37. \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $A = 1,\ B = 3$, quindi la soluzione particolare cercata è

$$\bar{y}(x) = \cos x + 3 \sin x.$$

L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione dell'omogenea con la particolare

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x} + \cos x + 3 \sin x.$$

Deriviamo la soluzione

$$y'(x) = -4c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x} - 4c_2 x e^{-4x} - \sin x + 3\cos x$$

e imponiamo le condizioni iniziali per determinare c_1 e c_2

$$y(0) = c_1 e^0 - c_2\, 0\, e^0 + \cos 0 + 3\sin 0 = c_1 + 1$$

$$y'(0) = -4c_1 e^0 + c_2 e^0 - 4c_2\, 0\, e^0 - \sin 0 + 3\cos 0 = -4c_1 + c_2 + 3.$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 1 \\ -4c_1 + c_2 + 3 = 5 \end{cases}$$

che ha come soluzione $c_1 = 0,\ c_2 = 2$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = 2xe^{-4x} + \cos x + 3\sin x.$$