Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 30 ottobre 2017

Domanda 1 $\lim_{x\to 0^+} x^{1-e^x} =$

A) $+\infty$ B) e
C) 0 D) 1

D

Domanda 2 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - e^x$
A) non è né iniettiva né surgettiva B) è iniettiva ma non surgettiva
C) è surgettiva ma non iniettiva D) è bigettiva

A

Domanda 3 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}(e^x - 1) =$
A) non esiste B) 1
C) $+\infty$ D) 0

A

Domanda 4 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ definita da $f(x) = \sin(\arctan x)$
A) è bigettiva B) è iniettiva ma non surgettiva
C) non è né iniettiva né surgettiva D) è surgettiva ma non iniettiva

A

Domanda 5 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2+1}}$
A) è limitata inferiormente ma non superiormente B) è limitata ma non ha minimo
C) ha sia massimo che minimo D) è strettamente crescente

C

Domanda 6 La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 \log x}{(x+1)((\log x) + 1)}$
A) ha due asintoti verticali B) ha tre asintoti verticali
C) ha un asintoto verticale D) non ha asintoti verticali

C

Domanda 7 La funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}(\log(1 + x) - \log x)$
A) ha due asintoti verticali e uno orizzontale B) ha tre asintoti verticali
C) ha un asintoto obliquo e due verticali D) ha un asintoto orizzontale e uno verticale

D

Domanda 8 La funzione $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\cos(1 - x^2)\sin(x^2 - 1)}{(x - 1)^2}$
A) non ha massimo B) è limitata superiormente
C) è debolmente crescente D) non è limitata inferiormente

A

Domanda 9 La funzione $f(x) = |x| \sin x$, nel punto $x_0 = 0$
A) ha un punto angoloso B) è derivabile
C) ha un punto di cuspide D) non è continua

B

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x - 1}{x} \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
A) è debolmente crescente B) ha un asintoto obliquo
C) ha massimo ma non ha minimo D) è limitata

C

codice 364686

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 30 ottobre 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^x \sqrt[3]{x^2-1}$ determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore) e punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cerchiamo eventuali asintoti. Con il cambiamento di variabile $t = -x$ otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \sqrt[3]{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \sqrt[3]{(-t)^2-1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{t^2-1}}{e^t} = 0$$

dato che stiamo confrontando un infinito di tipo potenza $t^{\frac{2}{3}}$ con una funzione esponenziale. Ne segue che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\infty} \sqrt[3]{\infty} = +\infty$$

verifichiamo quindi se la funzione ha un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \sqrt[3]{x^2-1} = +\infty$$

dato che $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Non c'è quindi nessun asintoto obliquo. Calcoliamo ora la derivata.

$$f'(x) = e^x(x^2-1)^{\frac{1}{3}} + e^x \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} 2x = e^x (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{2x}{3}\right) = \frac{e^x \left(x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

Dall'espressione ottenuta vediamo subito che la funzione potrebbe essere non derivabile nei punti $x = \pm 1$ dove si annulla il denominatore. Dato che la funzione è continua in tali punti, possiamo tentare di verificarne la derivabilità facendo il limite della derivata.

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = \frac{e^{-1}(1 - \frac{2}{3} - 1)}{\sqrt[3]{0^+}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1} f'(x) = \frac{e(1 + \frac{2}{3} - 1)}{\sqrt[3]{0^+}} = +\infty.$$

Ne segue che la funzione in entrambi punti non è derivabile ed ha retta tangente verticale. Vediamo ora gli intervalli di monotonia studiando il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \iff x^2 + \frac{2}{3}x - 1 > 0 \iff 3x^2 + 2x - 3 > 0.$$

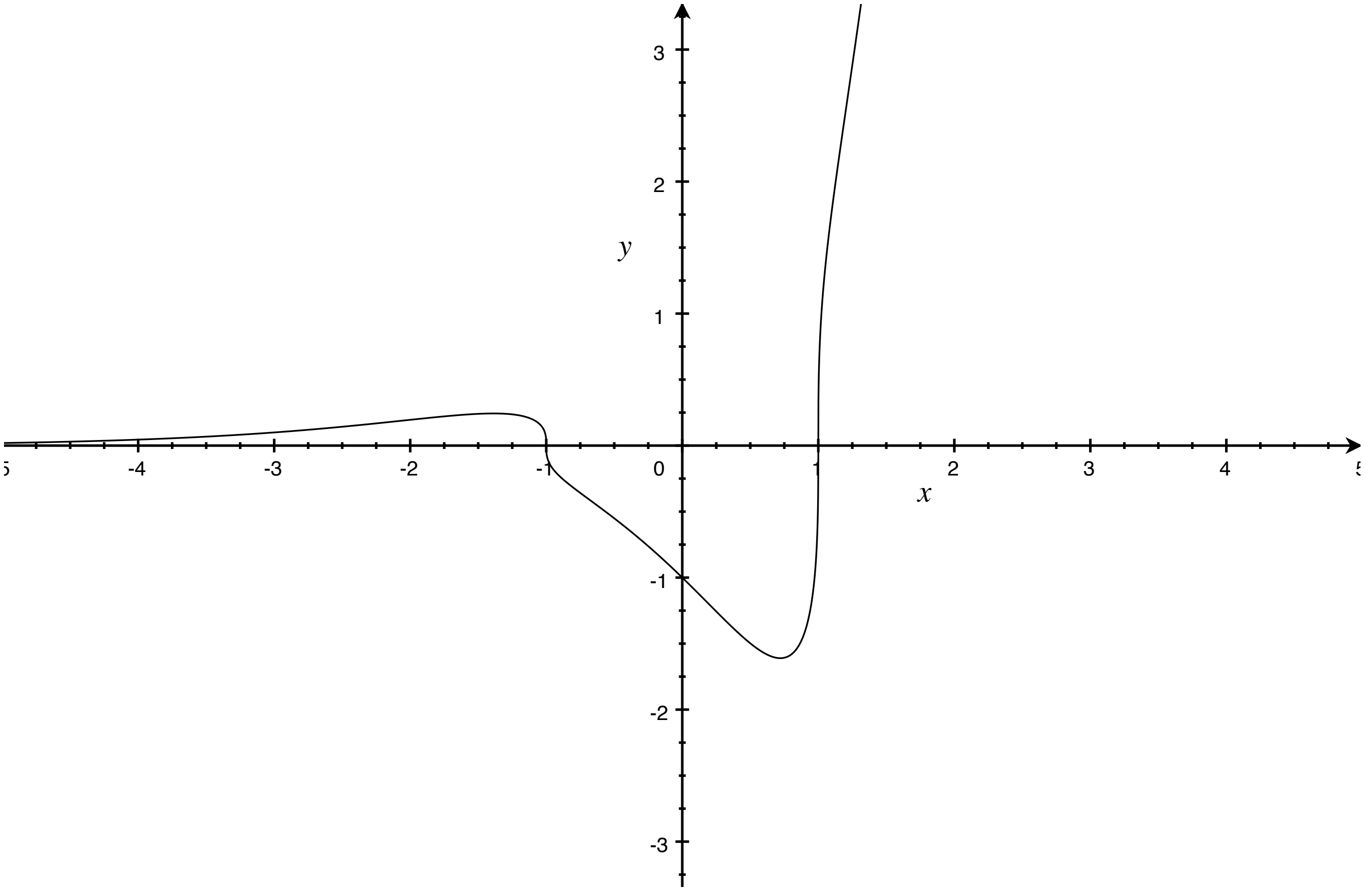
Determiniamo le radici del trinomio:

$$3x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+9}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Otteniamo quindi che f è strettamente crescente in $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right]$ e strettamente crescente in $\left[\frac{1+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$ è di massimo locale mentre $x = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$ è di minimo locale e assoluto. Il minimo della funzione è

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right) = e^{\frac{-1+\sqrt{10}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2-2\sqrt{10}}{9}}.$$

La funzione non ha massimo perché non è superiormente limitata.



Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{2-\cos^2 x}\, dx.$

Soluzione

Osserviamo che $\cos x \geq 0$ se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos x < 0$ se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Avremo quindi

$$\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{2-\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\, dx.$$

Cerchiamo quindi una primitiva della funzione $\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{2-(1-\sin^2 x)}\, dx = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx.$$

Eseguiamo ora la sostituzione $t = \sin x$, $\frac{dt}{dx} = \cos x$, quindi $\cos x\, dx = dt$, ottenendo

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c = \arctan(\sin x) + c.$$

Avremo quindi

$$\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{2-\cos^2 x}\, dx = [\arctan(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\arctan(\sin x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \arctan\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \arctan(\sin 0) - \arctan(\sin \pi) + \arctan\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \arctan 1 - \arctan 0 - \arctan 0 + \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y(1-3y) \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili. Considerando che in un intorno del punto iniziale risulta $y \neq 0$ e $y \neq \frac{1}{3}$, possiamo scrivere l'equazione come

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y(1-3y)} = 2$$

e integrarla ottenendo

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int 2\,dx + c.$$

Calcoliamo l'integrale della funzione razionale a primo membro cercando di determinare due numeri A, B tali che

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-3y} = \frac{1}{y(1-3y)}.$$

Poiché

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-3y} = \frac{A(1-3y)+By}{y(1-3y)} = \frac{(-3A+B)y+A}{y(1-3y)}$$

dovrà essere

$$\begin{cases} A & = 1 \\ -3A+B & = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = 1,\ B = 3$. Ne segue che

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int \frac{1}{y} + \frac{3}{1-3y}\,dy = \log|y| + 3\left(-\frac{1}{3}\right)\log|1-3y| = \log\left|\frac{y}{1-3y}\right|.$$

Avremo allora

$$\log\left|\frac{y}{1-3y}\right| = \int 2\,dx + c = 2x + c.$$

Troviamo la costante c utilizzando la condizione iniziale, sostituendo quindi $x = 0$ e $y = -1$ nella precedente equazione:

$$\log\left|\frac{-1}{1+3}\right| = 2\cdot 0 + c \iff \log\frac{1}{4} = c.$$

Quindi la soluzione, in forma implicita risulta

$$\log\left|\frac{y}{1-3y}\right| = 2x + \log\frac{1}{4}.$$

Applicando la funzione esponenziale a entrambi i membri abbiamo

$$\left|\frac{y}{1-3y}\right| = \frac{e^{2x}}{4}.$$

Dato che l'argomento del valore assoluto, in corrispondenza del valore iniziale $y = -1$ vale $-\frac{1}{4}$, possiamo dire che tale argomento sarà negativo in un intorno del punto iniziale. Quindi

$$\left|\frac{y}{1-3y}\right| = \frac{y}{3y-1}.$$

Sostituendo nell'equazione precedente avremo

$$\frac{y}{3y-1} = \frac{e^{2x}}{4} \iff 4y = e^{2x}(3y-1) \iff 4y = 3e^{2x}y - e^{2x} \iff y(3e^{2x}-4) = e^{2x} \iff y = \frac{e^{2x}}{3e^{2x}-4}.$$

Esercizio 4 Calcolare il limite della successione $a_n = \dfrac{2^n n! \log n}{n^n}$.

Soluzione

La successione assume solo valori positivi, possiamo quindi applicare il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n! \log n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{\log(n+1)}{\log n}$$
$$= 2(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{\log(n(1+\frac{1}{n}))}{\log n} = 2\frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\right).$$

Osserviamo ora che

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \log \frac{n}{n+1}} = e^{n \log(1 - \frac{1}{n+1})} = e^{n(-\frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-\frac{n}{n+1} + o(\frac{n}{n+1})}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+0)}{\log(+\infty)} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1 + 0 = 1.$$

Raccogliendo tutti i risultati otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot e^{-1} \cdot 1 = \frac{2}{e} < 1.$$

Per il criterio del rapporto avremo quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$