Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 4 settembre 2017

Domanda 1 La funzione $f : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

B

Domanda 2 La funzione $f : (1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \log \dfrac{x}{2}$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) non è né iniettiva né surgettiva
C) è bigettiva D) è surgettiva ma non iniettiva

B

Domanda 3 L'insieme $\left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{3} < \sin x \leq \dfrac{1}{2} \right\}$

A) è limitato superiormente ma non inferiormente B) è un intervallo
C) non è limitato né inferiormente né superiormente D) è limitato

C

Domanda 4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^8+1} - n^2\sqrt{n^4+1} \right) =$

A) 0 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $-\infty$ D) -1

B

Domanda 5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{n+1}} 3^n}{n!} =$

A) 1 B) $+\infty$ C) 0 D) e^3

C

Domanda 6 La funzione $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$

A) è debolmente crescente B) è sempre positiva
C) è sempre negativa D) ha un punto di massimo locale e uno di minimo locale

D

Domanda 7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \displaystyle\int_0^x e^t \cos t\, dt =$

A) 0 B) $+\infty$ C) non esiste D) $-\dfrac{1}{2}$

D

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 \tan x\, dx =$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\log 2}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\log 2}{2} - \dfrac{1}{4}$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y-1)(y+1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$ Allora $y(-2) =$

A) $\dfrac{1+e^2}{e^2-1}$ B) $\dfrac{e^4-1}{e^4}$ C) $\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$ D) $\dfrac{e^4-1}{e^4+1}$

D

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$ Allora $y(\pi) =$

A) 0 B) e^{π} C) $-\dfrac{5}{3}e^{2\pi} + \dfrac{2}{3}e^{2\pi}$ D) $\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$

B

codice 745811

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 4 settembre 2017

Domanda 1 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n+1}} 3^n}{n!} =$ | A
A) 0 B) 1 C) $+\infty$ D) e^3

Domanda 2 La successione $a_n = 5n - \sin n + \cos n$ | A
A) è strettamente crescente B) non ha limite C) è limitata D) non ha minimo

Domanda 3 $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^8+1} - n^2\sqrt{n^4+1}\right) =$ | C
A) 0 B) $-\infty$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -1

Domanda 4 La funzione $f : (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -2 < x \le 0 \\ x-1 & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$
A) ha minimo ma non ha massimo B) ha sia massimo che minimo C) ha massimo ma non ha minimo | C
D) non ha né massimo né minimo

Domanda 5 $\lim_{x\to-\infty} \int_0^x e^t \cos t \, dt =$ | A
A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $+\infty$ D) non esiste

Domanda 6 La funzione $f : (1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \log \frac{x}{2}$ | A
A) non è né iniettiva né surgettiva B) è iniettiva ma non surgettiva
C) è bigettiva D) è surgettiva ma non iniettiva

Domanda 7 La funzione $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt$ | B
A) è debolmente crescente B) ha un punto di massimo locale e uno di minimo locale
C) è sempre positiva D) è sempre negativa

Domanda 8 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < \sin x \le \frac{1}{2}\right\}$ | B
A) è limitato superiormente ma non inferiormente B) non è limitato né inferiormente né superiormente
C) è un intervallo D) è limitato

Domanda 9 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 \tan x \, dx =$ | B
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{4}$ C) $\frac{\log 2}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^2 - \sin x$ | A
A) ha minimo ma non ha massimo B) ha sia massimo che minimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha massimo ma non ha minimo

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 4 settembre 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{\log x - 1}$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore) e punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $x > 0$ a causa della presenza del logaritmo e quando il denominatore non si annulla, quindi quando $\log x \neq 1$ cioè se $x \neq e$. Ne segue che l'insieme di definizione è $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1 - \frac{1}{\log x}} = \frac{0}{1 - \frac{1}{-\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0;$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{e \cdot 1}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{e \cdot 1}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{\log x}} = \frac{+\infty}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty.$$

La funzione quindi ha un asintoto verticale di equazione $x = e$. Verifichiamo se ha un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\log x - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\log x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo sarebbe quindi 1. Vediamo ora il termine noto

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \log x}{\log x - 1} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \log x - x \log x + x}{\log x - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log x - 1} = +\infty$$

per ordine di infinito o applicando il teorema di De L'Hôpital. Quindi non c'è nessun asintoto obliquo.

Dai limiti vediamo che la funzione non è né superiormente né inferiormente limitata, quindi non ha né massimo né minimo.

Cerchiamo ora i punti di massimo o di minimo locale analizzando il segno della derivata.

$$f'(x) = \frac{\left(\log x + x\dfrac{1}{x}\right)(\log x - 1) - x(\log x)\dfrac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log^2 x - 1 - \log x}{(\log x - 1)^2}.$$

Il segno della derivata è determinato da quello del numeratore. Ponendo $t = \log x$ dobbiamo studiare il segno del trinomio $t^2 - t - 1$.

$$t^2 - t - 1 = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

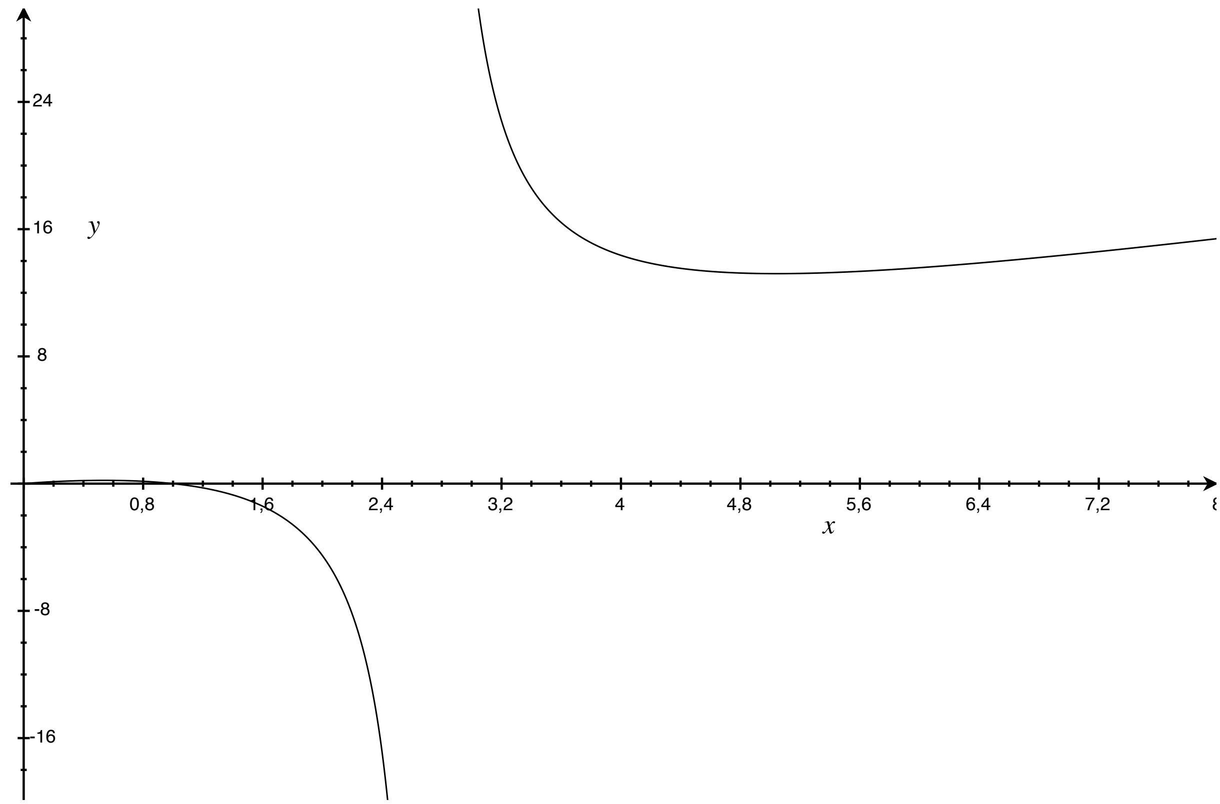
quindi

$$t^2 - t - 1 > 0 \iff t \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Riportando il risultato in termini di x otteniamo

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(0, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right) \cup \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right).$$

La funzione risulta quindi strettamente crescente in $\left(0, e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right]$, strettamente decrescente in $\left[e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}, e\right)$ e in $\left(e, e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right]$ infine strettamente crescente in $\left[e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ è di massimo locale mentre quello di ascissa $x = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ è di minimo locale.



Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x - 1}}\, dx.$$

Soluzione

Calcoliamo prima l'integrale indefinito eseguendo la sostituzione $e^x = t$. Avremo $x = \log t$ e $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$. Allora

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x - 1}}\, dx = \int \frac{t^2}{(t-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}\, dt.$$

Ora eseguiamo l'ulteriore sostituzione $z = t - 1$ con $\frac{dz}{dt} = 1$ ottenendo

$$\int \frac{t}{(t-1)^{\frac{1}{3}}}\, dt = \int \frac{z+1}{z^{\frac{1}{3}}}\, dz = \int z^{\frac{2}{3}} + z^{-\frac{1}{3}}\, dz = \frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + c.$$

Eseguiamo ora le sostituzioni all'inverso ottenendo

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x - 1}}\, dx = \ldots = \frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{5}(t-1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{5}(e^x - 1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(e^x - 1)^{\frac{2}{3}} + c.$$

L'integrale definito diventa

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x - 1}}\, dx = \left[\frac{3}{5}(e^x - 1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(e^x - 1)^{\frac{2}{3}}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{3}{5}(e-1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(e-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}(e^{\varepsilon} - 1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(e^{\varepsilon} - 1)^{\frac{2}{3}}.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x-1}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{5}(e-1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(e-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}(e^{\varepsilon}-1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(e^{\varepsilon}-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}(e-1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(e-1)^{\frac{2}{3}}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\sin x - \sin(2x) \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine del tipo $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = \sin x,\ b(x) = -\sin(2x)$. Troviamo una primitiva di $a(x)$

$$A(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

Eseguiamo ora l'integrazione

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{\cos x}(-\sin(2x))\,dx = \int e^{\cos x}(-2\sin x\cos x)\,dx.$$

Con la sostituzione $t = \cos x$ abbiamo $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, quindi, integrando poi per parti,

$$\int e^{\cos x}(-2\sin x\cos x)\,dx = \int e^t 2t\,dt = 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = 2\left(te^t - e^t\right) = 2\left(\cos x e^{\cos x} - e^{\cos x}\right) = 2e^{\cos x}(\cos x - 1).$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + c\right) = e^{-\cos x}\left(2e^{\cos x}(\cos x - 1) + c\right) = 2(\cos x - 1) + ce^{-\cos x}.$$

Ricaviamo ora la costante c dalla condizione iniziale

$$7 = y(0) = 2(\cos 0 - 1) + ce^{-\cos 0} = 2(1-1) + ce^{-1} = ce^{-1}$$

quindi $c = 7e$ e la soluzione risulta

$$y(x) = 2(\cos x - 1) + 7e\,e^{-\cos x} = 2(\cos x - 1) + 7e^{1-\cos x}.$$

Esercizio 4 Calcolare il limite della successione

$$a_n = n^{n-1} - (n-1)^n.$$

Soluzione

Il limite è nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Raccogliamo n^{n-1} ottenendo

$$a_n = n^{n-1}\left(1 - \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}\right) = n^{n-1}\left(1 - (n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right).$$

Valutiamo separatamente il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)\log\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)\log\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1}.$$

Avremo quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{n-1}\left(1 - (n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right) = \infty\left(1 - \frac{\infty}{e}\right) = -\infty.$$