Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 13 luglio 2017

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x|^3 - 1 > 0\}$. Allora $\inf(A) =$

A) -1 B) 1 C) $-\infty$ D) 0

C

Domanda 2 La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - (\sin x)^2}{x^4}$, nel suo insieme di definizione,

A) non ha nessun tipo di asintoto B) ha un asintoto orizzontale e nessun altro tipo di asintoto

C) ha un asintoto verticale e uno orizzontale D) ha un asintoto obliquo

B

Domanda 3 La funzione $f(x) = \dfrac{\sin x \cos(x^2)}{x^2}$, nel suo insieme di definizione,

A) ha un asintoto obliquo B) ha minimo assoluto

C) ha massimo assoluto D) non è limitata inferiormente

D

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{4n^4 + 5^n + \log(2n)}{\log^7 n + 2^{2n} + n^6}$, definita per $n \geq 1$

A) è debolmente decrescente B) ha minimo

C) non ha limite D) non è limitata inferiormente

B

Domanda 5 La successione $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}\right)^{3n}$

A) non ha limite B) tende a $+\infty$

C) non ha né massimo né minimo D) ha limite finito

D

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^2 (3x+2)^3 \, dx =$

A) 1020 B) 340 C) $\dfrac{4080}{3}$ D) $\dfrac{1024}{3}$

B

Domanda 7 $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x-3} + 2\sqrt{2x-1} \, dx =$

A) la funzione non è integrabile sull'intervallo $[1, 2]$ B) $\sqrt{27} - 1 - 3\log 2$

C) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{27} - 1\right) - 3\log 2$ D) $\sqrt{27} + 3\log 2$

C

Domanda 8 $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} x e^{-x} \, dx =$

A) $+\infty$ B) 0 C) $-\infty$ D) e^{-2}

C

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(2) = 2 \\ y'(2) = 0. \end{cases}$ Allora $y(-1) =$

A) $-16e^{18}$ B) $2e^9$ C) $-16e^9$ D) $\dfrac{4}{5}e^{18}$

C

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} + x^2 \\ y(5) = -2. \end{cases}$ Allora $y(3) =$

A) $-\dfrac{18}{25}$ B) $\dfrac{225}{4}$ C) $-\dfrac{3710}{25}$ D) $-\dfrac{468}{25}$

D

codice 307170

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 13 luglio 2017

Domanda 1 $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} xe^{-x}\,dx =$

A) $+\infty$ B) 0 C) e^{-2} D) $-\infty$

D

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{4n^4+5^n+\log(2n)}{\log^7 n+2^{2n}+n^6}$, definita per $n \geq 1$

A) non è limitata inferiormente B) è debolmente decrescente C) ha minimo
D) non ha limite

C

Domanda 3 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x|^3 - 1 > 0\}$. Allora $\inf(A) =$

A) 0 B) -1 C) 1 D) $-\infty$

D

Domanda 4 $\int_0^2 (3x+2)^3\,dx =$

A) $\dfrac{4080}{3}$ B) 1020 C) 340 D) $\dfrac{1024}{3}$

C

Domanda 5 La funzione $f(x) = \dfrac{\sin x\cos(x^2)}{x^2}$, nel suo insieme di definizione,

A) ha massimo assoluto B) ha un asintoto obliquo C) ha minimo assoluto
D) non è limitata inferiormente

D

Domanda 6 $\lim_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x^2}-\sin x}{(x+x^2)\left(\log(1+x)\right)^2} =$

A) 0 B) $+\infty$
C) -1 D) $-\dfrac{5}{6}$

D

Domanda 7 La successione $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}\right)^{3n}$

A) tende a $+\infty$
B) non ha limite C) non ha né massimo né minimo D) ha limite finito

D

Domanda 8 La funzione $f(x) = \dfrac{x^2-(\sin x)^2}{x^4}$, nel suo insieme di definizione,

A) ha un asintoto orizzontale e nessun altro tipo di asintoto B) non ha nessun tipo di asintoto
C) ha un asintoto verticale e uno orizzontale D) ha un asintoto obliquo

A

Domanda 9 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{(n+1)(-3)^{n-1}}{n!}$. Risulta che

A) $\sup a_n = 0$ B) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
C) $\{a_n\}$ è debolmente crescente D) $\{a_n\}$ è limitata

D

Domanda 10 $\int_1^2 \dfrac{3}{x-3} + 2\sqrt{2x-1}\,dx =$

A) la funzione non è integrabile sull'intervallo $[1,2]$ B) $\sqrt{27}-1-3\log 2$
C) $\sqrt{27}+3\log 2$ D) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{27}-1\right)-3\log 2$

D

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 13 luglio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log(e^x + x) - \log x$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $x > 0$ e $e^x + x > 0$. La seconda condizione è automaticamente verificata quando vale la prima. Quindi f è definita per $x \in (0, +\infty)$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log(e^0 + 0) - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^x + x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^x}{x} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \log(+\infty) = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Non ci sono asintoti orizzontali. Verifichiamo la presenza di quello obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(e^x + x)}{x} - \frac{\log x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x(1 + \frac{x}{e^x}))}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log(1 + \frac{x}{e^x})}{x} - 0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{x}{e^x})}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

quindi il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo dovrebbe essere $m = 1$. Valutiamo ora

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\log(e^x + x) - \log x - x) = \lim_{x\to+\infty} (\log(e^x + x) - \log x - \log(e^x))$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\log \frac{e^x + x}{e^x} - \log x\right) = \log 1 - \infty = -\infty$$

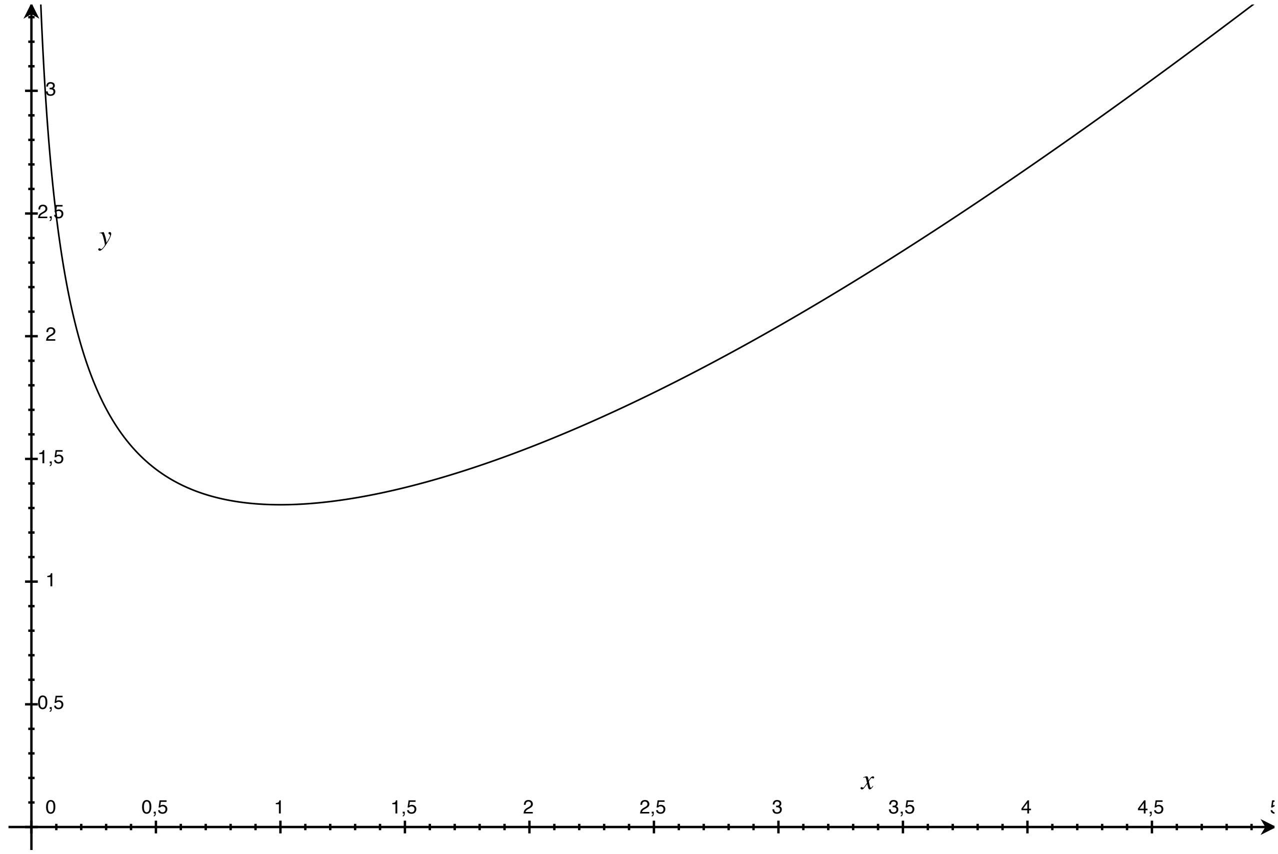
quindi non c'è l'asintoto obliquo.
Calcoliamo ora la derivata per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - \frac{1}{x} = \frac{(e^x + 1)x - (e^x + x)}{(e^x + x)x} = \frac{e^x(x - 1)}{(e^x + x)x}.$$

Il denominatore, nell'insieme di definizione, è sempre positivo mentre

$$e^x(x - 1) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 1]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è quindi di minimo assoluto e il minimo di f risulta essere $f(1) = \log(e + 1)$. La funzione non è superiormente limitata quindi non ha massimo.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3+6x-4}{x^2-x-2}\,dx.$$

Soluzione

La funzione integranda è una funzione razionale con il numeratore di grado superiore al denominatore, eseguiamo quindi la divisione fra polinomi. Otteniamo un quoziente pari a $x+1$ e come resto $9x-2$. Risulta quindi

$$x^3+6x-4=(x^2-x-2)(x+1)+9x-2$$

e, di conseguenza

$$\frac{x^3+6x-4}{x^2-x-2}=x+1+\frac{9x-2}{x^2-x-2}.$$

Troviamo ora le radici del denominatore che sono 2 e -1. Decomponiamo ora la funzione razionale a secondo membro cercando due incognite A, B tali che

$$\frac{9x-2}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}.$$

Avremo quindi

$$\frac{9x-2}{x^2-x-2}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Moltiplicando per il denominatore abbiamo

$$9x-2=(A+B)x+(A-2B)$$

e, dal principio di identità dei polinomi deve essere

$$\begin{cases} A+B=9 \\ A-2B=-2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare otteniamo $A = \frac{16}{3},\ B = \frac{11}{3}$, quindi

$$\frac{9x-6}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{16}{x-2} + \frac{11}{x+1}\right).$$

Mettendo insieme tutti i risultati avremo allora che

$$\int \frac{x^3+6x-4}{x^2-x-2}\,dx = \int x+1+\frac{1}{3}\left(\frac{16}{x-2}+\frac{11}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{16}{3}\log|x-2|+\frac{11}{3}\log|x+1|+c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} + \dfrac{1}{\arctan x} \\ y(1) = \log(\pi^2). \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è lineare del tipo $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ b(x) = \dfrac{1}{\arctan x}$. Per prima cosa troviamo una primitiva di a

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \log(1+x^2).$$

Ora eseguiamo l'integrale

$$\int e^{-A(x)}b(x)\,dx = \int \frac{e^{-\log(1+x^2)}}{\arctan x}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}.$$

Eseguendo la sostituzione $t = \arctan x$ otteniamo $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ quindi $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|\arctan x| + c.$$

Ne segue che la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + c\right) = e^{\log(1+x^2)}\left(\log|\arctan x| + c\right) = (1+x^2)\left(\log|\arctan x| + c\right).$$

Ricaviamo ora la costante c dalla condizione $y(1) = \log(\pi^2)$

$$\log(\pi^2) = (1+1^2)(\log|\arctan 1| + c) = 2\left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right) + c\right) = 2(\log\pi - \log 4 + c).$$

Quindi

$$\frac{\log(\pi^2)}{2} = \log\pi - \log 4 + c \iff \frac{2\log\pi}{2} = \log\pi - \log 4 + c \iff c = \log 4.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = (1+x^2)\left(\log|\arctan x| + \log 4\right) = (1+x^2)\log(4\arctan x)$$

dove abbiamo tolto il valore assoluto perché in un intorno del punto iniziale $x_0 = 1$ la funzione $\arctan x$ è positiva.