

Analisi Matematica A

Pisa, 22 giugno 2017

Domanda 1 La funzione $f(x) = x + \frac{3|x|}{x}$, nel suo insieme di definizione,

- A) ha un asintoto verticale B) ha due asintoti obliqui
C) ha un asintoto orizzontale D) non ha asintoti di nessun tipo

B

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ è

- A) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2-1}$ B) $2x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$
C) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \left(2x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x}\right)$ D) $2x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2-1} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

- A) ha minimo ma non ha massimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata D) ha sia massimo che minimo

D

Domanda 4 La successione $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)!}$, definita per $n \geq 1$,

- A) non ha limite B) ha limite finito C) tende a $+\infty$ D) ha minimo ma non ha massimo

B

Domanda 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^n}{e^{n \log n}} =$

- A) 0 B) $+\infty$ C) $e - 1$ D) $\frac{1}{e}$

D

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{\arctan(t^2 - 1)}{1 + t^2} dt$

- A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) ha due punti di discontinuità
C) è debolmente crescente D) ha un punto angoloso

A

Domanda 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x t^2 - \sqrt{t} + \frac{1}{t} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}} + 3 dt =$

- A) 3 B) $+\infty$ C) -1 D) $-\infty$

D

Domanda 8 La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x^2}^0 (t^2 - 1)^2 dt$

- A) ha minimo ma non ha massimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{\log x}{x} \\ y(3) = 4. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

- A) $\frac{4}{3} + \frac{\log 3}{3}$ B) $\frac{4}{3} - \frac{\log^2 3}{2}$ C) $\frac{2}{3} + \frac{\log 3}{3}$ D) $\frac{4}{3} - \frac{\log 3}{9}$

C

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x^2 y^2 \\ y(-2) = 4. \end{cases}$ Allora $y(-1) =$

- A) $-\frac{12}{25}$ B) $-\frac{75}{29}$ C) $\frac{11}{8}$ D) $\frac{105}{11}$

A

Analisi Matematica A

Pisa, 22 giugno 2017

Domanda 1 La funzione $f(x) = x + \frac{3|x|}{x}$, nel suo insieme di definizione,

- A) ha un asintoto verticale B) ha un asintoto orizzontale C) ha due asintoti obliqui
D) non ha asintoti di nessun tipo

C

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ è

- A) $2x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2-1} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ B) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2-1}$ C) $2x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$
D) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \left(2x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x}\right)$

D

Domanda 3 La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

- A) ha sia massimo che minimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata D) ha minimo ma non ha massimo

A

Domanda 4 La successione $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)!}$, definita per $n \geq 1$,

- A) tende a $+\infty$ B) ha minimo ma non ha massimo C) non ha limite D) ha limite finito

D

Domanda 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^n}{e^{n \log n}} =$

- A) $\frac{1}{e}$ B) $+\infty$ C) $e - 1$ D) 0

A

Domanda 6 La funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{\arctan(t^2 - 1)}{1 + t^2} dt$

- A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) è debolmente crescente
C) ha due punti di discontinuità D) ha un punto angoloso

A

Domanda 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x t^2 - \sqrt{t} + \frac{1}{t} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}} + 3 dt =$

- A) $-\infty$ B) -1 C) $+\infty$ D) 3

A

Domanda 8 La funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x^2}^0 (t^2 - 1)^2 dt$

- A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) non ha né massimo né minimo

B

Domanda 9 Dire quale dei seguenti $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$

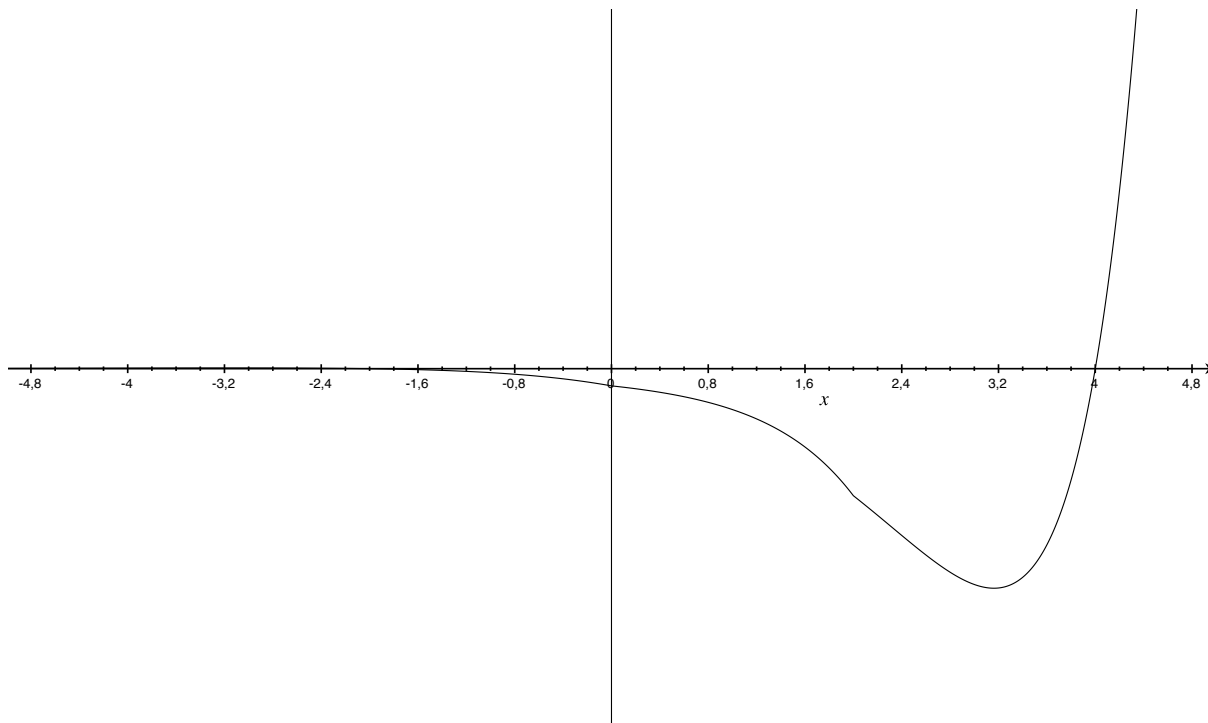
- A) $\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$ B) $4096 + 4096i$ C) $-\sqrt{3} + i$ D) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

C

Domanda 10 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}\right)^6 =$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ B) -1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $1 - \sqrt{3}i$

B



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^{-x} \sin(2x) dx.$$

Soluzione

Eseguiamo l'integrazione per parti integrando e^{-x} e derivando $\sin(2x)$. Avremo

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin(2x) dx &= -e^{-x} \sin(2x) - \int -e^{-x} 2 \cos(2x) dx \\ &= -e^{-x} \sin(2x) + 2 \left(-e^{-x} \cos(2x) - \int -e^{-x} (-2) \sin(2x) dx \right) = -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx. \end{aligned}$$

Quindi, riportando al primo membro l'ultimo integrale, otteniamo

$$5 \int e^{-x} \sin(2x) dx = -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) + c.$$

L'integrale cercato sarà quindi

$$\int e^{-x} \sin(2x) dx = \frac{-e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) + c}{5}.$$

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Soluzione

Esaminiamo prima l'equazione omogenea associata $y'' + y' = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = 0$ che ha soluzioni $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Il termine noto è un polinomio di grado 0, quindi cercheremo una soluzione particolare di grado 0. Tuttavia dobbiamo osservare che 0 è radice dell'equazione caratteristica, quindi siamo in presenza di risonanza e dovremo moltiplicare per x la soluzione particolare cercata. Dovremo quindi determinare una costante A tale che la funzione $\bar{y} = Ax$ risolva l'equazione completa. Avremo

$$\bar{y}' = A, \quad \bar{y}'' = 0$$

e, sostituendo nell'equazione

$$A = 1,$$

quindi

$$\bar{y} = x.$$

La soluzione generale dell'equazione completa è quindi

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 + x.$$

Troviamo ora le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali. Derivando la soluzione otteniamo

$$y' = -c_1 e^{-x} + 1$$

e, sostituendo le condizioni iniziali, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -2 \\ -c_1 + 1 & = -4. \end{cases}$$

Risolvendo abbiamo $c_1 = 5$, $c_2 = -7$, quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta essere

$$y = 5e^{-x} - 7 + x.$$