Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 6 aprile 2017

Domanda 1 L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - \frac{1}{x} + \sin x < 0\}$ è

A) inferiormente ma non superiormente limitato B) superiormente ma non inferiormente limitato
C) limitato D) né superiormente né inferiormente limitato

B

Domanda 2 $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^2}{(1-x+\log x)x^2} =$

A) -8 B) $-\frac{3}{2}$ C) 1 D) 0

A

Domanda 3 $\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^x) - x =$

A) $+\infty$ B) 0 C) $-\infty$ D) $-\frac{1}{2}$

B

Domanda 4 La successione $a_n = e^{(-1)^n n} - e^{\frac{(-1)^n}{n}}$

A) non è limitata inferiormente B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite D) ha massimo ma non ha minimo

C

Domanda 5 La successione $a_n = \frac{1+\sin^2 n}{\log(1+n^2)}$, definita per $n \geq 1$,

A) ha massimo ma non ha minimo B) non ha limite
C) ha sia massimo che minimo D) è limitata ma non ha massimo

A

Domanda 6 $\int_0^1 \frac{1+x}{x^2-4}\, dx =$

A) $\frac{1}{4}\log 3 - \log 2$ B) $\log 3 - \log 2$ C) $\log\frac{9}{4} - \log\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$

A

Domanda 7 $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x\, dx =$

A) $-\pi$ B) -3π C) 0 D) 2π

B

Domanda 8 La funzione $F : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{4+t}$

A) è sempre ≥ 0 B) cambia segno C) è sempre ≤ 0 D) è debolmente monotona

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x+\log x}{y} \\ y(4) = 5 \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) $\sqrt{16-8\log 4}$ B) $\sqrt{\frac{\log 13}{4}}$ C) $\sqrt{\frac{31}{\log 4}}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$ Allora $y(\log 2) =$

A) $-\frac{176}{13}$ B) $-\frac{61}{16}$ C) 19 D) $-4e^{-2} + 5e^2$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 6 aprile 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2 + x|}\right)$$

determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi inferiore e superiore (o massimo e minimo), intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando il denominatore $|x^2 + x|$ è diverso da zero e quando l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. Questa seconda condizione è sempre verificata perché l'argomento è somma di due quantità sempre strettamente positive. Dobbiamo quindi richiedere $x^2 + x \neq 0$ cioè $x \neq 0$ e $x \neq -1$. L'insieme di definizione della funzione è quindi

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Vediamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + 0\right) = -\log 2$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0^+}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0^+}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + 0\right) = -\log 2.$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$ di equazione $y = -\log 2$ e due asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 0$. Non ci sono asintoti obliqui. Dividiamo ora il dominio in due parti per eliminare il valore assoluto. Osserviamo che

$$x^2 + x > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty), \qquad x^2 + x < 0 \iff x \in (-1, 0).$$

Risulta quindi che

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2 + x}\right) & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ \log\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2 + x}\right) & \text{se } x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Consideriamo prima il caso $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Avremo allora

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2+x}} = \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)^2 + 2(x^2+x)}.$$

Osserviamo che in questa parte dell'insieme di definizione risulta $x^2 + x > 0$ quindi il denominatore è positivo. Il segno della derivata dipenderà quindi da quello del numeratore. Avremo quindi, intersecando con l'insieme di definizione:

$$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (-\infty, -1), \qquad f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (0, +\infty).$$

Per il caso $x \in (-1, 0)$ avremo invece

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2+x}} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2 - 2(x^2+x)} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)(x^2+x-2)}.$$

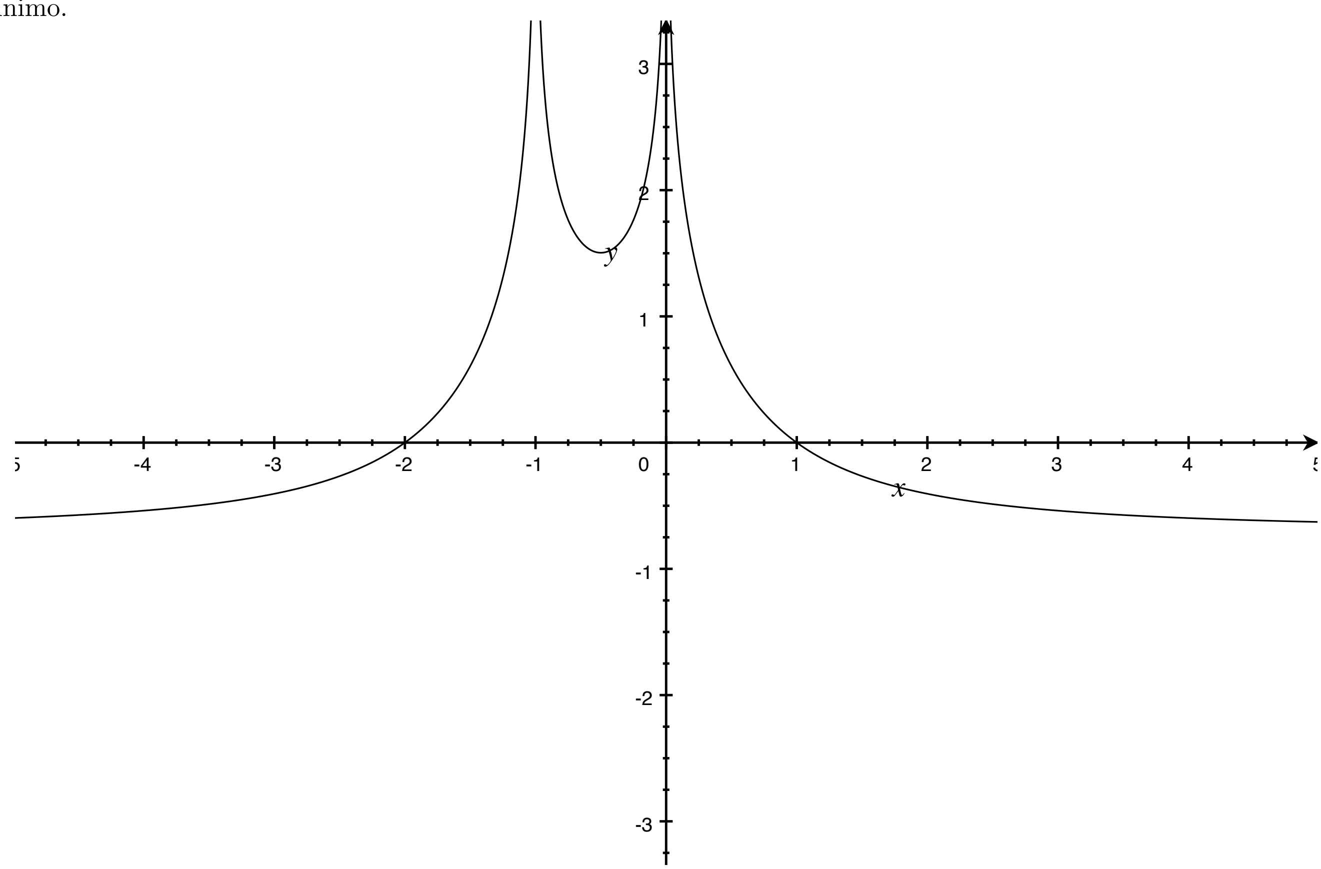
Studiando il segno di numeratore e denominatore otteniamo che

$$2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}, \quad x^2+2x-2 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty), \quad x^2+x > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Avremo quindi

$$f'(x) > 0 \;\forall\, x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \qquad f'(x) < 0 \;\forall\, x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

Riassumendo i risultati trovati otteniamo che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, strettamente decrescente in $\left(-1, -\frac{1}{2}\right]$, strettamente crescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = -\frac{1}{2}$ è di minimo locale. L'estremo inferiore di f vale $-\log 2$, l'estremo superiore vale $+\infty$. La funzione non ha né massimo né minimo.



Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Soluzione

Calcoliamo esplicitamente una primitiva della funzione integranda. Con la sostituzione

$$\log x = t, \; \frac{dx}{x} = dt$$

otteniamo

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{dt}{t} = \log t + c = \log(\log x) + c.$$

Dato che

$$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + c$$

avremo

$$\int \frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \log(\log x) + \frac{1}{x} + c.$$

Calcoliamo ora l'integrale definito che risulta

$$\int_n^{n^2} \frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\log(\log x) + \frac{1}{x}\right]_n^{n^2} = \log\left(\log\left(n^2\right)\right) + \frac{1}{n^2} - \log(\log n)) - \frac{1}{n}$$

$$= \log(2\log n) + \frac{1}{n^2} - \log(\log n)) - \frac{1}{n} = \log 2 + \log(\log n) + \frac{1}{n^2} - \log(\log n)) - \frac{1}{n} = \log 2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}.$$

Eseguendo il passaggio al limite si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\log 2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) = \log 2.$$

Esercizio 3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2y}{x} + e^{2x} \\ y(1) = e^2. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è lineare non omogenea. Poniamo quindi $a(x) = -\frac{2}{x},\ b(x) = e^{2x}$. Troviamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int -\frac{2}{x}\, dx = -2\log|x|.$$

Calcoliamo ora la primitiva (integrando per parti)

$$\int e^{-A(x)} b(x)\, dx = \int e^{2\log|x|} e^{2x}\, dx = \int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{e^{2x}}{2}x^2 - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x\, dx = \frac{e^{2x}}{2}x^2 - \left(\frac{e^{2x}}{2}x - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + c.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = e^{-2\log|x|}\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + c\right).$$

Ricaviamo la costante c dalla condizione iniziale $y(1) = e^2$

$$e^2 = e^0\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} + c\right) \iff c = \frac{3}{4}e^2.$$

Sostituendo nella soluzione generale otteniamo infine

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{3}{4}e^2\right).$$