Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2017

Domanda 1 $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1}{(\sin x)^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) =$$

A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) $\frac{1}{32}$

A

Domanda 2 La funzione $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$

A) ha due asintoti verticali e un asintoto orizzontale B) ha un asintoto verticale e uno obliquo
C) non ha asintoti D) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

D

Domanda 3 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{2\cos x - \sin(x^2) - 2}{x^3}$

A) è limitata inferiormente ma non superiormente B) è limitata
C) è limitata superiormente ma non inferiormente D) non è limitata né inferiormente né superiormente

C

Domanda 4 La successione $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2-3n}\right)^{3n^2+1}$, definita per $n \geq 4$,

A) ha massimo ma non ha minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 5 $\lim_{n\to\infty} (1-(-1)^n)\, n^{((-1)^n)} =$

A) 0 B) non esiste C) $+\infty$ D) 1

A

Domanda 6 La successione $a_n = \frac{n^3 - n!}{e^n - n^4}$

A) ha sia massimo che minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 7 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos x + \sin x}\, dx =$$

A) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\log 2$ B) $\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log 2$ C) $\sqrt{2} - 1$ D) $\frac{\pi - \sqrt{2}}{2}$

C

Domanda 8 $$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x}{(\cos(x^2))^2}\, dx =$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{\log \pi}{2}$

A

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$ Allora $y(3) =$

A) $\frac{17}{e^6}$ B) $\frac{2}{e^6}$ C) $\frac{-1}{2e^6}$ D) $\frac{5e^6}{4} + \frac{3}{4e^6}$

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 1 - \frac{y}{x} \\ y(2) = -5. \end{cases}$ Allora $y(5) =$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $-\frac{25}{2}\log 5$

B

codice 195834

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2017

Domanda 1 Determinare quale di questi numeri risolve l'equazione $(z^4+4)(z^2-5z-2)=0$ | D

A) $z=\dfrac{5+i\sqrt{33}}{2}$ B) $z=\sqrt{2}$ C) $z=-i\sqrt{2}$ D) $z=1+i$

Domanda 2 La successione $a_n=\dfrac{n^3-n!}{e^n-n^4}$ | D

A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo C) ha minimo ma non ha massimo
D) ha massimo ma non ha minimo

Domanda 3 La funzione $f(x)=\dfrac{\log x}{x-1}$ | A

A) ha un asintoto verticale e uno orizzontale B) ha due asintoti verticali e un asintoto orizzontale
C) ha un asintoto verticale e uno obliquo
D) non ha asintoti

Domanda 4 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-(-1)^n)\,n^{((-1)^n)}=$ | D

A) 1 B) non esiste C) $+\infty$ D) 0

Domanda 5 La successione $a_n=\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-3n}\right)^{3n^2+1}$, definita per $n\geq 4$, | B

A) ha sia massimo che minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha massimo ma non ha minimo D) non ha né massimo né minimo

Domanda 6 La parte immaginaria del numero complesso $z=\dfrac{(3-5i)(-1+3i)}{-2+i}$ vale | D

A) -15 B) 15 C) 14 D) -8

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(2x)}{\cos x+\sin x}\,dx=$ | B

A) $\dfrac{\pi-\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log 2$ D) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\log 2$

Domanda 8 | A

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1}{(\sin x)^2+1}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=$$

A) 0 B) $-\infty$ C) $+\infty$ D) $\dfrac{1}{32}$

Domanda 9 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{2\cos x-\sin(x^2)-2}{x^3}$ | C

A) non è limitata né inferiormente né superiormente B) è limitata
C) è limitata superiormente ma non inferiormente D) è limitata inferiormente ma non superiormente

Domanda 10 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{x}{(\cos(x^2))^2}\,dx=$ | C

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\log\pi}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\pi}{4}$

codice 2014/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|1+x|}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o, eventualmente, massimo e minimo, punti di massimo e di minimo locali, intervalli di concavità e convessità. Tracciare inoltre un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x+1| \neq 0$ quindi per $x \neq -1$. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{|1-\infty|} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{e^{-1}}{|1-1|} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty}}{|1+\infty|} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

ma questa forma indeterminata è facilmente risolubile applicando il teorema di De L'Hôpital o ricordando la gerarchia degli inifiniti, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Come prima conseguenza abbiamo che

$$\sup(f) = +\infty.$$

Osservando che $f(x) > 0$ per ogni x nell'insieme di definizione e che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ si ha anche che

$$\inf(f) = 0.$$

La funzione presenta anche un asintoto verticale di equazione $x = -1$. C'è la possibilità di un asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$, verifichiamolo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x|x+1|} = +\infty$$

sempre per la gerarchia degli infiniti o utilizzando il teorema di De L'Hôpital. Non c'è quindi nessun asintoto obliquo.

Cerchiamo ora i massimi o i minimi locali con lo studio della monotonia. Osserviamo che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1+x} & \text{se } x > -1 \\[2ex] \dfrac{-e^x}{1+x} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi, se $x > -1$ avremo

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

mentre se $x < -1$ sarà

$$f'(x) = \frac{-xe^x}{(1+x)^2}.$$

Dato che $\frac{e^x}{(1+x)^2} > 0$ per ogni $x \neq 1$ avremo che il segno è determinato solo da quello di x. Considerando i due casi $x < -1$ e $x > 1$ otteniamo facilmente che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (-1, 0), \qquad f'(0) = 0.$$

La funzione è quindi strettamente crescente in $(-\infty, -1)$, strettamente decrescente in $(-1, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = 0$ è di minimo locale.

Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda. Per $x > -1$ avremo

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+x)^2 - xe^x 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)e^x\left((1+x)^2 - 2x\right)}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$$

mentre per $x < -1$

$$f''(x) = \frac{-e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}.$$

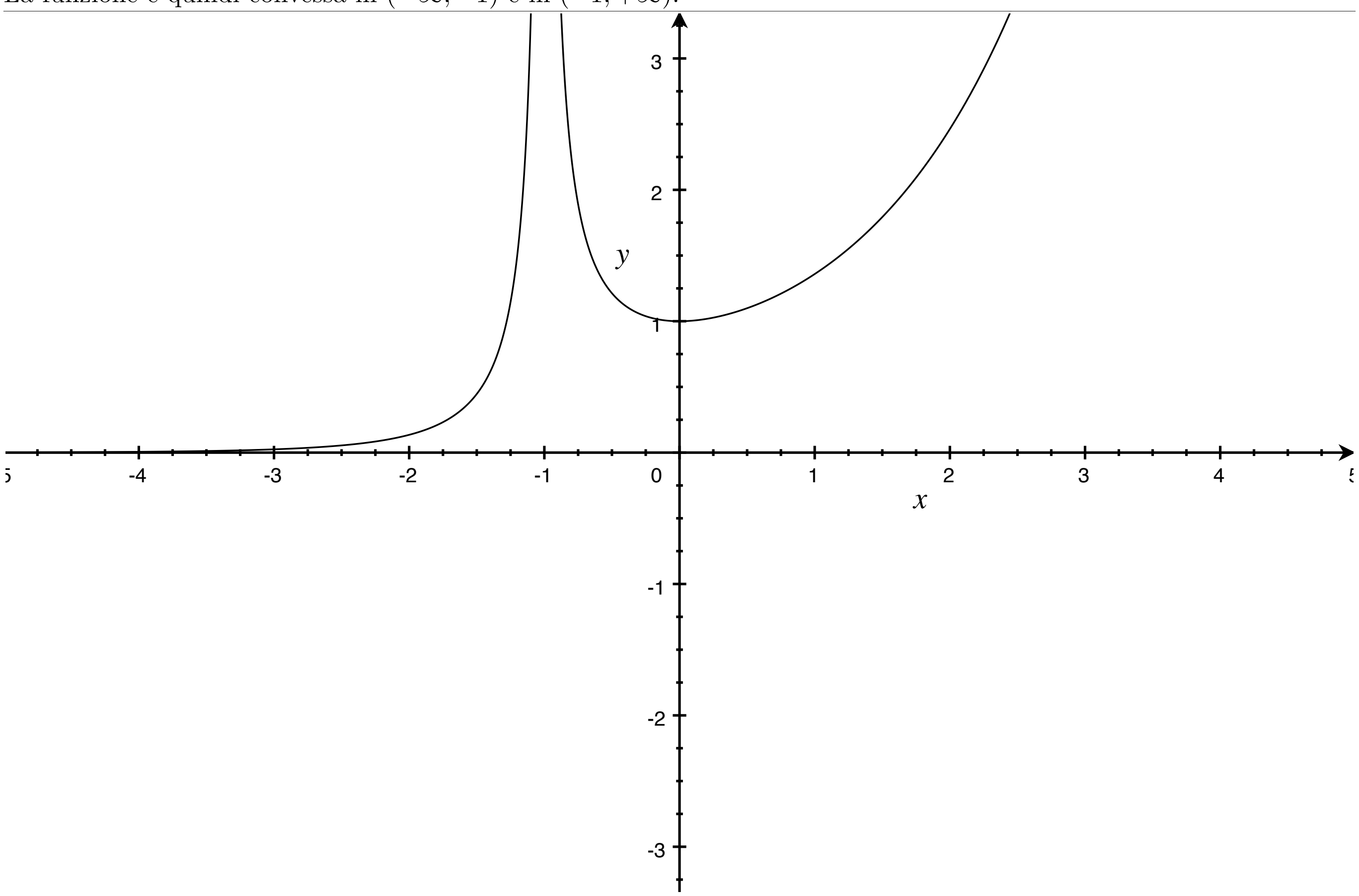
Dato che

$$(1+x)^3 > 0 \iff x > -1$$

risulta immediato che

$$f''(x) > 0 \ \forall x \neq -1.$$

La funzione è quindi convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sqrt[3]{x} \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\, dx.$$

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione $x = t^3$ con il cambio di differenziale $dx = 3t^2\, dt$. Otteniamo

$$\int \sqrt[3]{x} \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\, dx = \int t \sin t \ 3t^2\, dt = 3 \int t^3 \sin t\, dt.$$

Calcoliamo questo integrale per parti integrando $\sin t$, derivando t^3 e ripetendo la procedura 3 volte.

$$3\int t^3 \sin t\, dt = 3\left(-t^3\cos t - \int 3t^2(-\cos t)\, dt\right) = -3t^3\cos t + 9\left(t^2\sin t - \int 2t\sin t\, dt\right)$$
$$= -3t^3\cos t + 9t^2\sin t - 18\left(-t\cos t - \int -\cos t\, dt\right) = -3t^3\cos t + 9t^2\sin t + 18t\cos t - 18\sin t + c.$$

Sostituendo $t = x^{\frac{1}{3}}$ otteniamo

$$\int \sqrt[3]{x}\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\, dx = -3x\cos(x^{\frac{1}{3}}) + 9x^{\frac{2}{3}}\sin(x^{\frac{1}{3}}) + 18x^{\frac{1}{3}}\cos(x^{\frac{1}{3}}) - 18\sin(x^{\frac{1}{3}}) + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^4}{(x-2)y^3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è a variabili separabili. Abbiamo quindi

$$\int \frac{y^3}{1+y^4}\, dy = \int \frac{dx}{x-2} + c.$$

Eseguiamo il primo integrale con la sostituzione $1+y^4 = t$, $4y^3\, dy = dt$ ottenendo

$$\int \frac{y^3}{1+y^4}\, dy = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\log|t| = \frac{1}{4}\log|1+y^4| = \frac{1}{4}\log(1+y^4).$$

Il secondo integrale risulta

$$\int \frac{dx}{x-2} = \log|x-2|$$

e, osservando che il punto iniziale $x = 0$, abbiamo $x-2 = 0-2 < 0$ quindi la quantità $x-2$ è negativa in un intorno del punto iniziale. Allora avremo $|x-2| = 2-x$. La soluzione generale dell'equazione è quindi

$$\frac{1}{4}\log(1+y^4) = \log(2-x) + c.$$

Ricaviamo c sostituendo i valori iniziali $x = 0$, $y = 1$

$$\frac{1}{4}\log(1+1) = \log(2-0) + c \iff c = -\frac{3}{4}\log 2.$$

Sostituendo la c nella soluzione otteniamo

$$\frac{1}{4}\log(1+y^4) = \log(2-x) - \frac{3}{4}\log 2$$
$$\log(1+y^4) = 4\log(2-x) - 3\log 2$$
$$(1+y^4) = \frac{(2-x)^4}{2^3}$$
$$y^4 = \frac{(2-x)^4}{8} - 1.$$

Ora basta osservare che $y(0) = 1 > 0$ per scegliere la radice positiva ottenendo

$$y = \sqrt[4]{\frac{(2-x)^4}{8} - 1}.$$

Esercizio 4 Studiare la successione $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n - \frac{7}{2}}$ determinandone massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La successione è definita per $n \geq \frac{7}{2}$, quindi per $n \geq 4$ dato che $n \in \mathbb{N}$. Calcoliamo ora il limite della successione:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1 - \frac{7}{2n}}\right) = +\infty(\sqrt{2} - \sqrt{(1-0)}) = +\infty.$$

Otteniamo quindi che

$$\sup(a_n) = +\infty$$

e che la successione non ha massimo.

Studiamo ora la monotonia della successione considerando la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x - \frac{7}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, x \geq 4.$$

La funzione è derivabile e risulta

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{7}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x - \frac{7}{2}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x - \frac{7}{2}}}.$$

Avremo quindi che $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\sqrt{2}\sqrt{x - \frac{7}{2}} - \sqrt{x} > 0 \iff \sqrt{2}\sqrt{x - \frac{7}{2}} > \sqrt{x} \iff 2\left(x - \frac{7}{2}\right) > x \iff x > 7.$$

Ne segue che la funzione f è strettamente decrescente nell'intervallo reale $[4, 7]$, strettamente crescente sulla semiretta $[7, +\infty)$ e il punto $x = 7$ è di minimo assoluto per f. Da questo si conclude che

$$\min(a_n) = a_7 = f(7) = \sqrt{14} - \sqrt{7 - \frac{7}{2}} = \sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{28}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$