Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 17 gennaio 2017

Domanda 1 L'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^7 + 3e^x + \log|x| < 0\right\}$

A) è limitato B) non è limitato né superiormente né inferiormente

C) è limitato superiormente ma non inferiormente D) è limitato inferiormente ma non superiormente

C

Domanda 2 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{e^{(x^3)}-1}$

A) ha massimo B) è limitata ma non ha massimo

C) è limitata superiormente ma non inferiormente D) non ha né massimo né minimo

D

Domanda 3 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) è derivabile B) non è continua

C) è derivabile a sinistra ma non a destra D) è continua ma non derivabile

B

Domanda 4 La successione $a_n = n(-1)^n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$

A) non ha limite ma è limitata B) non è limitata né superiormente né inferiormente

C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

D

Domanda 5

$$\lim_{n\to\infty} e^{n+1}\log\frac{e^n+3}{e^n+1} =$$

A) $2e$ B) 1 C) 0 D) $+\infty$

A

Domanda 6 La funzione $F : \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\tan t}\, dt$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è surgettiva ma non iniettiva

C) è bigettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

D

Domanda 7 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt =$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $+\infty$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$

D

Domanda 8 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx =$

A) $\dfrac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B) 0 C) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$

C

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Allora risulta $y\left(\dfrac{1}{2e}\right) =$

A) $1 + \log 2$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{\log\dfrac{e+1}{e}}$ D) 1

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ Allora risulta $y(5) =$

A) $2e^{20}$ B) $e^{20} - e^{-20}$ C) $-8e^{20}$ D) $-38e^{20}$

D

codice 704650

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 17 gennaio 2017

Domanda 1 La successione $a_n = n(-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

A) non ha né massimo né minimo B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite ma è limitata D) non è limitata né superiormente né inferiormente

B

Domanda 2 $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 =$

A) $\frac{5+5i\sqrt{3}}{10}$ B) $\frac{1+i3^{\frac{5}{2}}}{64}$ C) $\frac{1-i9\sqrt{3}}{64}$ D) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

D

Domanda 3 La funzione $F : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^{x^2} e^{\tan t}\, dt$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è bigettiva C) è surgettiva ma non iniettiva
D) non è né iniettiva né surgettiva

D

Domanda 4 L'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^7 + 3e^x + \log|x| < 0\right\}$

A) è limitato B) è limitato superiormente ma non inferiormente
C) non è limitato né superiormente né inferiormente
D) è limitato inferiormente ma non superiormente

B

Domanda 5 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) è continua ma non derivabile B) non è continua
C) è derivabile a sinistra ma non a destra D) è derivabile

B

Domanda 6 $$\lim_{n\to\infty} e^{n+1} \log\frac{e^n+3}{e^n+1} =$$

A) $+\infty$ B) 1 C) 0 D) $2e$

D

Domanda 7 $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt =$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) $+\infty$ D) $-\frac{1}{2}$

A

Domanda 8 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{e^{(x^3)}-1}$

A) non ha né massimo né minimo B) ha massimo C) è limitata ma non ha massimo
D) è limitata superiormente ma non inferiormente

A

Domanda 9 Quali dei seguenti $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $z^3 = \frac{1+i}{1-i}$

A) $z = 1 - i$ B) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ C) $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ D) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

C

Domanda 10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx =$

A) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ D) 0

A

codice 2014/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 17 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log(2x)}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), punti di massimo o di minimo locali, intervalli di convessità e di concavità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita se $x > 0$ per la presenza del logaritmo. Inoltre il denominatore deve essere diverso da 0, quindi

$$\log(2x) \neq 0 \iff 2x \neq 1 \iff x \neq \frac{1}{2}.$$

L'insieme di definizione risulta pertanto

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Valutiamo ora i limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

dove per l'ultimo limite si è utilizzata la gerarchia degli infiniti oppure il teorema di De L'Hôpital. Otteniamo subito che

$$\sup(f) = +\infty, \qquad \inf(f) = -\infty$$

e che è presente un asintoto verticale di equazione $x = \frac{1}{2}$. Verifichiamo ora l'eventuale esistenza di un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log(2x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

quindi non è presente l'asintoto obliquo.

Cerchiamo ora i punti di massimo o minimo locali con lo studio della derivata:

$$f'(x) = \frac{\log(2x) - x\frac{2}{2x}}{\log^2(2x)} = \frac{\log(2x) - 1}{\log^2(2x)}.$$

Avremo che

$$f'(x) > 0 \iff \log(2x) - 1 > 0 \iff \log(2x) > 1 \iff 2x > e \iff x > \frac{e}{2}.$$

La funzione f sarà quindi strettamente decrescente nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right]$ e strettamente crescente in $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{e}{2}$ è di minimo locale.

Valutiamo ora la derivata seconda per la convessità.

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{2x}\log^2(2x) - (\log(2x) - 1)\, 2\log(2x)\frac{2}{2x}}{\log^4(2x)} = \frac{\log^2(2x) - (\log(2x) - 1)\, 2\log(2x)}{x\log^4(2x)} = \frac{\log(2x)\,(-\log(2x) + 2)}{x\log^4(2x)}.$$

Osserviamo ora che

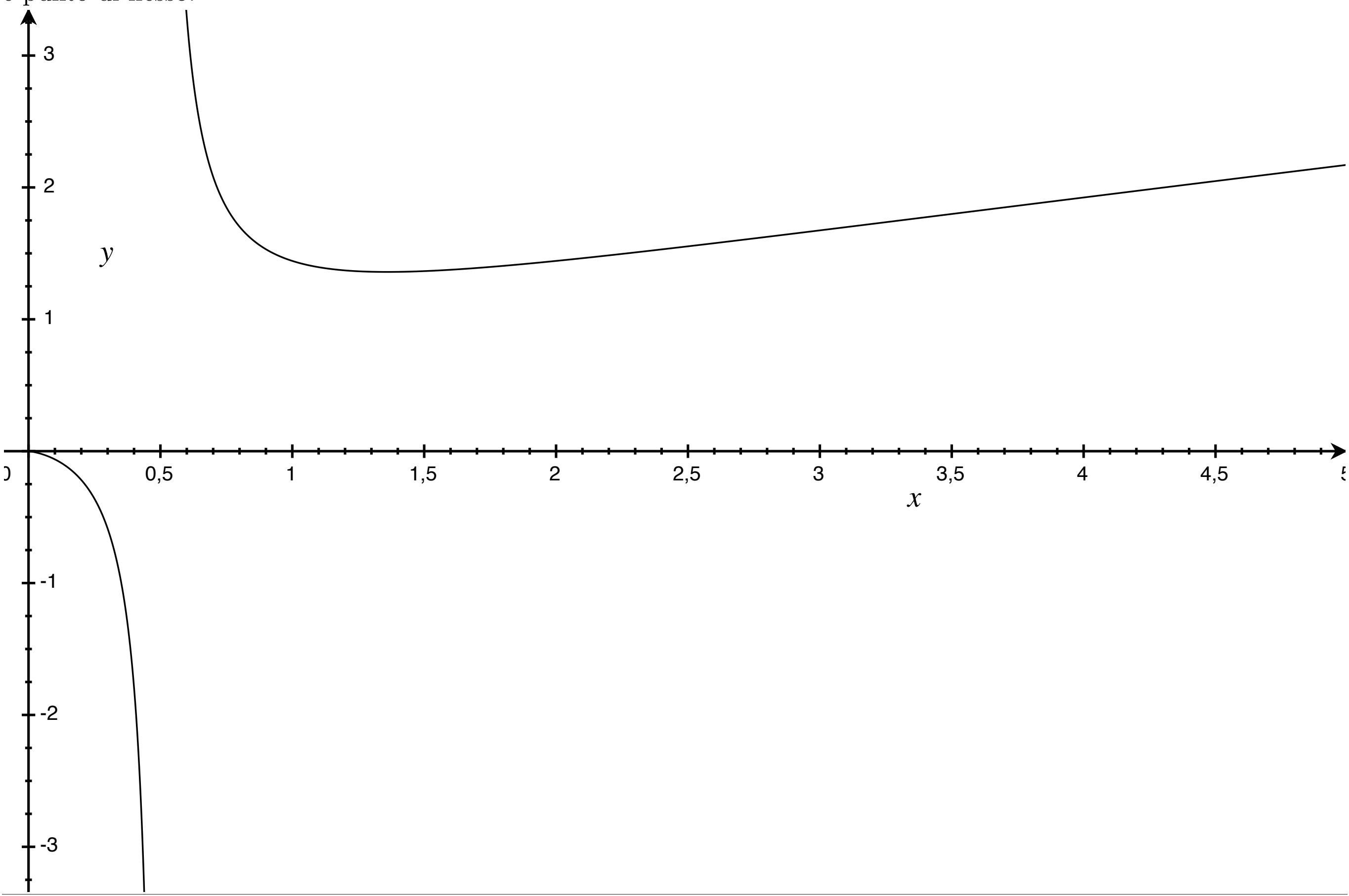
$$\log(2x) > 0 \iff x > \frac{1}{2}$$

$$-\log(2x) + 2 > 0 \iff 2 > \log(2x) \iff e^2 > 2x \iff x < \frac{e^2}{2}$$

quindi

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}\right).$$

Ne segue che la funzione f è concava in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, convessa in $\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}\right]$ e concava in $\left[\frac{e^2}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{e^2}{2}$ è punto di flesso.



Esercizio 2 Trovare il massimo della funzione $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Soluzione

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione F è derivabile e risulta

$$F'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Per ogni $x \in (0,1]$ si ha che $F'(x) > 0$ quindi F è crescente, di conseguenza assume il suo massimo nell'estremo destro dell'intervallo, cioè

$$\max(F) = F(1) = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Calcoliamo una primitiva della funzione $f(t) = \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}$ utilizzando la sostituzione $t^2+1 = y$. Avremo $2tdt = dy$ e

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{t^2 t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t^2+1}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \left[\frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x} y - \dfrac{x}{\sin x} \\[2ex] y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è lineare del primo ordine non omogenea, della forma $y' = a(x)y + b(x)$. Determiniamo prima una primitiva di $a(x)$

$$A(x) = \int -\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\,dx = \int -1 - \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -x - \log|\sin x|.$$

Osserviamo che nel punto iniziale $x = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$ quindi scegliamo il segno positivo per l'argomento del valore assoluto. Avremo quindi $A(x) = -x - \log(\sin x)$. Dobbiamo ora calcolare

$$\int e^{-A(x)}b(x)\,dx = \int e^{x+\log(\sin x)}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)dx = -\int e^x \sin x \frac{x}{\sin x}\,dx = -\int e^x\, x\,dx = -\left(e^x x - \int e^x\,dx\right)$$
$$= -e^x x + e^x + c.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + c\right) = e^{-x-\log(\sin x)}(-e^x x + e^x + c) = \frac{e^{-x}}{\sin x}(-e^x x + e^x + c) = \frac{-x+1+ce^{-x}}{\sin x}.$$

Ricaviamo ora la costante c dalla condizione iniziale:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{\pi}{2} + 1 + ce^{-\frac{\pi}{2}}}{1}$$

quindi

$$-\frac{\pi}{2} + 1 + ce^{-\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \iff ce^{-\frac{\pi}{2}} = 1 \iff c = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Sostituendo nella soluzione il valore di c avremo

$$y(x) = \frac{-x+1+e^{\frac{\pi}{2}-x}}{\sin x}.$$