Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 19 dicembre 2016

Domanda 1 La successione $a_n = \dfrac{3^{\frac{1}{n}} + 2^{-n} + n^3}{(-1)^n(\log n)^4 + n^2 + 5}$ definita per $n \geq 1$

A) ha minimo ma non ha massimo B) non è limitata inferiormente
C) non ha limite D) ha sia massimo che minimo

A

Domanda 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{(n^2)} =$

A) 0 B) $\dfrac{1}{e^2}$ C) e^2 D) $+\infty$

A

Domanda 3 La successione $a_n = \dfrac{n^3 \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos n}{n^4+1}$

A) non è limitata né inferiormente né superiormente B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite ma è limitata D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

B

Domanda 4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{4^n n!} =$

A) 1 B) $+\infty$ C) 0 D) $\sqrt[4]{e}$

C

Domanda 5 $\displaystyle\int_4^9 e^{\sqrt{x}}\, dx =$

A) $16e^9 - 6e^4$ B) $81e^9 - 16e^4$ C) $4e^3 - 2e^2$ D) $9e^3 - 4e^4$

C

Domanda 6 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{4+t^2}\, dt =$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{4}$ C) 0 D) $+\infty$

B

Domanda 7 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |x| \sin x\, dx =$

A) $\pi + 1$ B) 0
C) π^2 D) $\pi - 1$

D

Domanda 8 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{3y}{x} - 3x \\ y(3) = -5. \end{cases}$ Risulta che $y(1) =$

A) 3 B) $-\dfrac{5}{27}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{49}{27}$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$ Allora risulta che

A) $y' = 2e^x - e^{-2x}$ B) $y' = \cos(2x) - \sin x$
C) $y' = 3e^x - 2\cos(2x)$ D) $y' = \dfrac{5}{3}e^x - \dfrac{2}{3}e^{-2x}$

D

Domanda 10 Una soluzione dell'equazione differenziale $y' = 2x\cos^2 y$ è

A) $y = \log(\sin(x^2) + 2)$ B) $y = x^2 \sin^2 x$
C) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$ D) $y = \arctan(x^2 - 4)$

D

codice 706575

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 19 dicembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 5x - 5)$ determinandone eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o eventualmente massimo e minimo, punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita in tutta la retta $\mathbb{R}$ dove è continua e derivabile. Calcoliamo i limiti. Con la sostituzione $t = -x$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}(-t^3 - 3t^2 - 5t - 5) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3 - 3t^2 - 5t - 5}{e^t} = 0$$

avendo ottenuto l'ultimo limite applicando il teorema di De L'Hôpital 3 volte.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\infty}\infty = \infty.$$

Abbiamo quindi trovato che la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$ e che $\sup(f) = +\infty$. Controlliamo la presenza di un eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(x^2 - 3x + 5 - \frac{5}{x}\right) = e^{\infty}\infty = +\infty$$

quindi non c'è asintoto obliquo. Cerchiamo ora i punti di massimo o di minimo locali con lo studio della monotonia. La derivata della funzione vale

$$f'(x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 5x - 5) + e^x(3x^2 - 6x + 5) = e^x(x^3 - x) = e^x(x-1)(x+1)x.$$

Risulta quindi che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

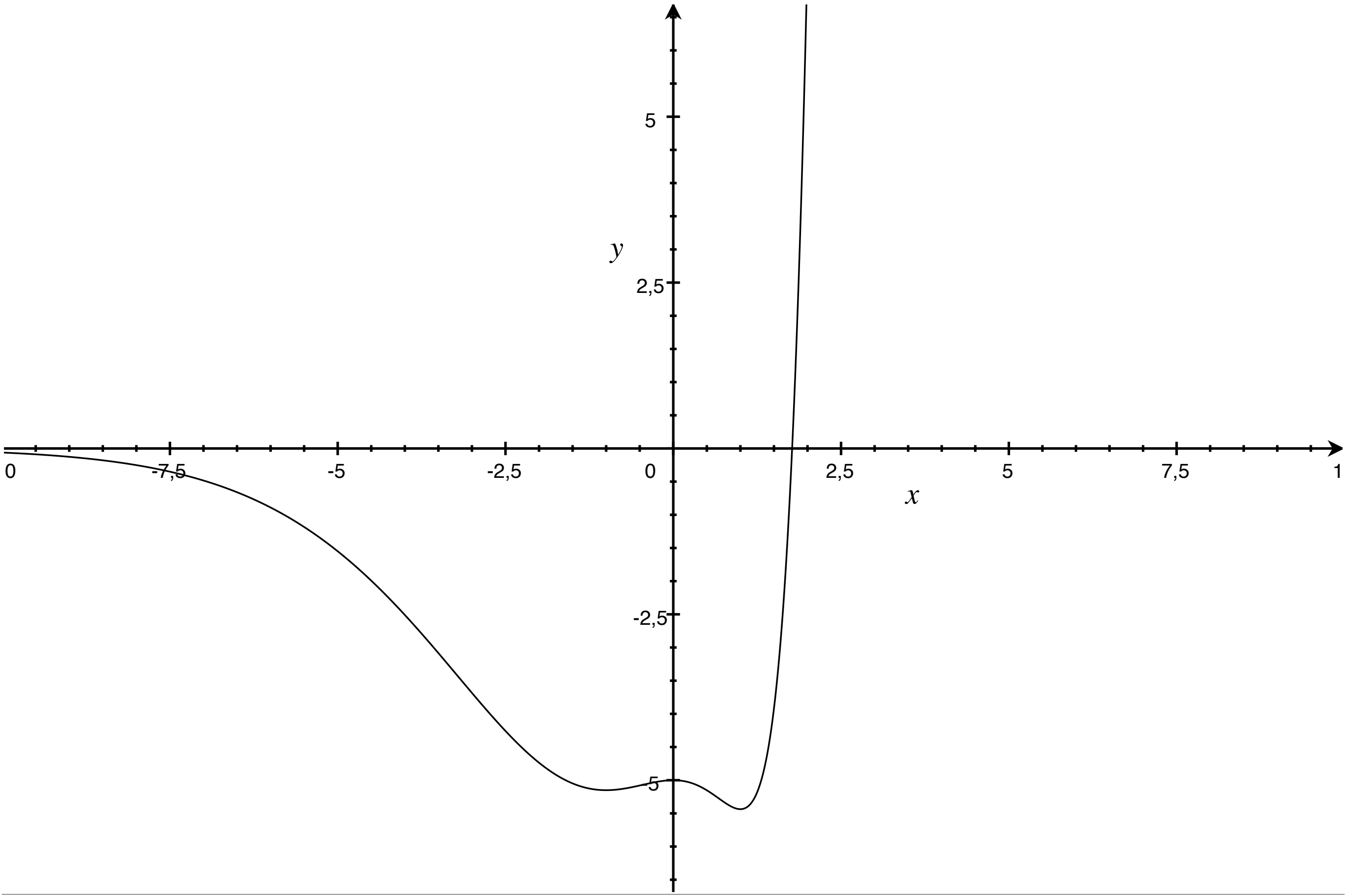
Ne segue che f è decrescente sulla semiretta $(\infty, -1]$, crescente nell'intervallo $[-1, 0]$, decrescente in $[0, 1]$ e crescente in $[1, +\infty)$. I punti $x_1 = -1$ e $x_3 = 1$ sono punti di minimo locale mentre il punto $x_2 = 0$ è di massimo locale. Per determinare il minimo della funzione dobbiamo confrontare $f(x_1)$ e $f(x_3)$.

$$f(x_1) = f(-1) = e^{-1}(-1 - 3 - 5 - 5) = -\frac{14}{e}, \qquad f(x_3) = f(1) = e^1(1 - 3 + 5 - 5) = -2e.$$

Risulta che

$$-\frac{14}{e} > -2e \iff \frac{14}{e} < 2e \iff 7 < e^2$$

e l'ultima disuguaglianza è vera perché $e > 2,7$ quindi $e^2 > 7,29$. Il minimo della funzione è quindi $-2e$.



Esercizio 2 Determinare una primitiva della funzione $f(x) = x \arctan(2x)$.

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $2x = t$ avremo $2dx = dt$ quindi

$$\int x \arctan(2x)\, dx = \int \frac{t}{2} \arctan t \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int t \arctan t\, dt$$

Eseguiamo ora per parti l'integrale integrando t e derivando $\arctan t$ (omettiamo il fattore moltiplicativo $\frac{1}{4}$ che reintrodurremo alla fine del calcolo).

$$\int t \arctan t\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \int \frac{t^2}{2} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \arctan t = \frac{t^2+1}{2} \arctan t - \frac{t}{2}.$$

Rimettiamo ora il fattore $\frac{1}{4}$ e ricordiamo che $t = 2x$ ottenendo che

$$\int x \arctan(2x)\, dx = \frac{4x^2+1}{8} \arctan(2x) - \frac{x}{4} + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' = e^{5x} \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Risolviamo prima l'omogenea $y'' - 4y' = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ che ha le soluzioni $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4$. La soluzione generale dell'omogenea sarà quindi

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{4x}, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Dato che il termine noto è e^{5x} e che 5 non è radice dell'equazione caratteristica cercheremo una soluzione della forma $\bar{y}(x) = Ae^{5x}$. Quindi

$$\bar{y}'(x) = 5Ae^{5x}, \qquad \bar{y}''(x) = 25Ae^{5x}.$$

Sostituendo nell'equazione completa otteniamo

$$25Ae^{5x} - 20Ae^{5x} = e^{5x}$$

quindi, dividendo per e^{5x},

$$5A = 1 \iff A = \frac{1}{5}.$$

Ne segue che una soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{5}e^{5x}.$$

La soluzione generale dell'equazione completa è allora

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 + c_2 e^{4x} + \frac{1}{5}e^{5x}, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo le costanti c_1 e c_2 utilizzando le condizioni iniziali. Prima calcoliamo

$$y'(x) = 4c_2 e^{4x} + e^{5x}$$

quindi avremo

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{5}, \qquad y'(0) = 4c_2 + 1.$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{5} = 3 \\ 4c_2 + 1 = -1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $c_1 = \frac{33}{10},\ c_2 = -\frac{1}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = \frac{33}{10} - \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{1}{5}e^{5x}.$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}.$$

Soluzione

$$\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n} = \frac{e^{(\log n)^2}}{e^{n \log\log n}} = e^{(\log n)^2 - n\log\log n}.$$

Basta ora osservare che

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^2 - n\log\log n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(\log n)^2}{n} - \log\log n\right) = \infty(0 - \infty) = -\infty.$$

Dal teorema sul limite della composizione segue quindi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0.$$