Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 10 novembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \log\big((4-x^2)(1-x)\big)$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo, punti di massimo e di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è strettamente positivo, quindi se

$$(4-x^2)(1-x) > 0$$

e questo si verifica se $x \in (-2,1) \cup (2,+\infty)$. Valutiamo ora i limiti agli estremi del dominio della funzione.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \log(+\infty) = +\infty.$$

La funzione quindi non è né superiormente né inferiormente limitata. Ci cono inoltre 3 asintoti verticali di equazione rispettivamente $x=-2,\ x=1,\ x=2$. Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big((4-x^2)(1-x)\big)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(x^3(1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3})\big)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3\log x + \log(1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3})}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\log x}{x} + \frac{0}{+\infty} = 0$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo. Cerchiamo ora eventuali punti di massimo o di minimo locali.

$$f'(x) = \frac{-2x(1-x)-(4-x^2)}{(4-x^2)(1-x)} = \frac{3x^2-2x-4}{(4-x^2)(1-x)}.$$

Osserviamo che il denominatore, nel dominio della funzione sempre positivo, quindi il segno della derivata determinato da quello del numeratore. Troviamo per quali valori si annulla il trinomio

$$3x^2-2x-4=0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$$

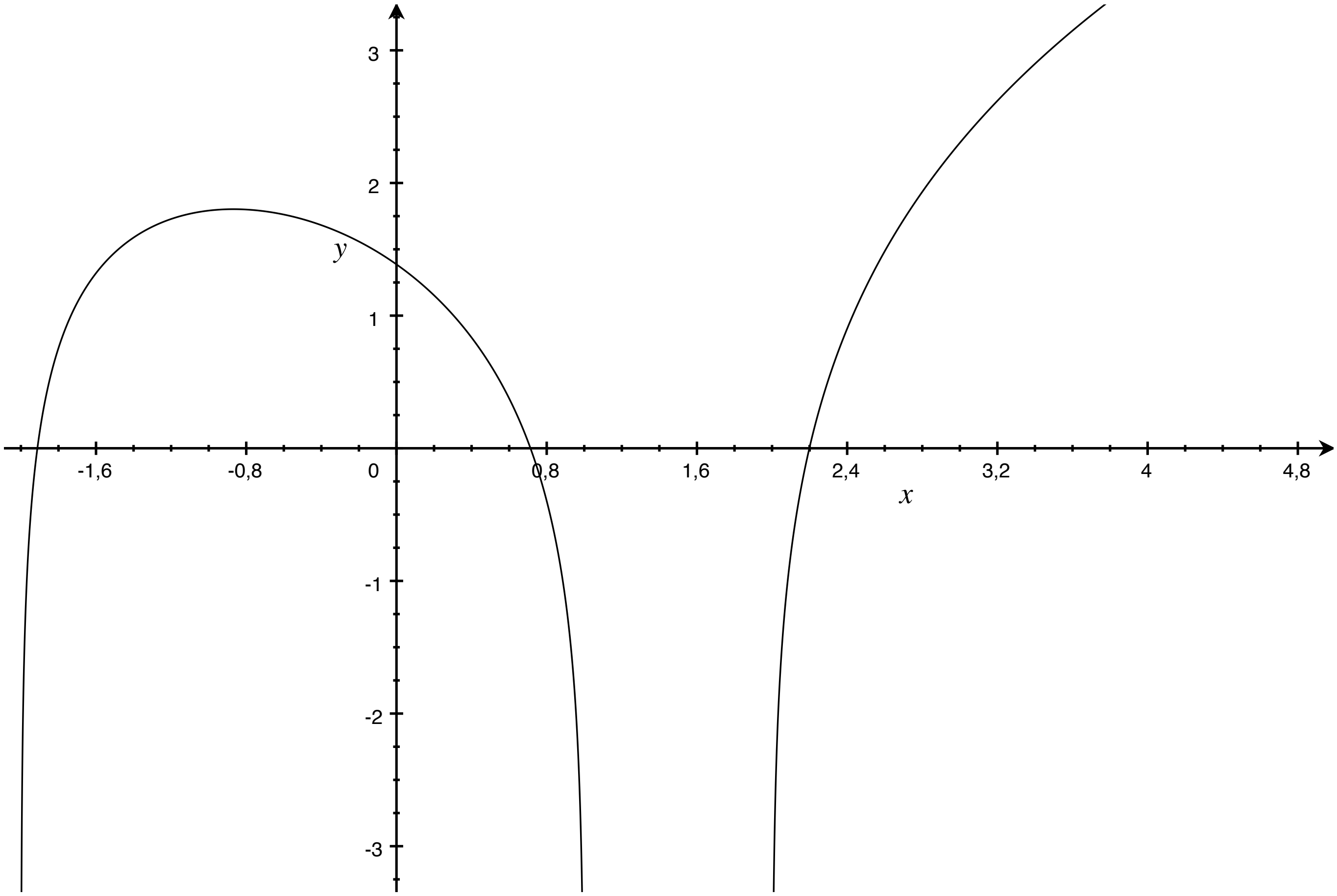
quindi

$$3x^2-2x-4>0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right).$$

Intersecando questo risultato con il dominio della funzione otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-2, \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right) \cup (2,+\infty).$$

La funzione è quindi strettamente crescente se $x \in \left(-2, \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right]$, strettamente decrescente se $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{3}, 1\right)$ e strettamente crescente se $x \in (2,+\infty)$. Il punto $x = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$ di massimo locale.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| + (\sin x)^3}{1 + x^2}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| + \sin^3 x}{1 + x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1 + x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{(\sin x)^3}{1 + x^2}\, dx.$$

Per quanto riguarda il primo integrale al secondo membro, la funzione integranda è pari quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1 + x^2}\, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{|x|}{1 + x^2}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = \left[\log(1 + x^2)\right]_0^1 = \log 2.$$

L'integranda del secondo integrale è invece dispari quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\sin x)^3}{1 + x^2}\, dx = 0.$$

Ne risulta che

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| + (\sin x)^3}{1 + x^2}\, dx = \log 2.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x \\ y(0) = \frac{9}{4} \\ y'(0) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Cominciamo trovando una soluzione dell'omogenea. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

che ha le radici $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati. Dato che il termine noto è un polinomio di secondo grado e che 0 non è radice del polinomio caratteristico, cercheremo una soluzione del tipo

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Derivando otteniamo

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \qquad \bar{y}'' = 2A.$$

Sostituiamo ora nell'equazione differenziale ottenendo

$$2A + 3(2A + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x$$

quindi

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = x^2 + 2x.$$

Uguagliando i coefficienti dei monomi dello stesso grado ricaviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 2 \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4}$. Una soluzione particolare è quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea risulta quindi

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Ricaviamo ora i coefficienti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali. Calcoliamo prima la derivata della soluzione

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + x - \frac{1}{2}.$$

Sostituendo $x = 0$ otteniamo

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{4}, \qquad y'(0) = -c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2}.$$

Abbiamo quindi il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \\ -c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

che ha come soluzione $c_1 = 7,\ c_2 = -5$. La soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$$y(x) = 7e^{-x} - 5e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$