Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 2 settembre 2016

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2x + \sin x)^3$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è bigettiva
C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

B

Domanda 2 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(\sin x)$

A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

A

Domanda 3 La funzione $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\tan x}{x(1+\tan^2 x)}$

A) ha un asintoto verticale B) non ha asintoti
C) ha due asintoti verticali D) ha un asintoto obliquo

B

Domanda 4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!} =$$

A) $+\infty$ B) $e^{\frac{9}{4}}$ C) 0 D) $\dfrac{3}{2}$

A

Domanda 5 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ definita per $n \geq 1$

A) non ha né massimo né minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 6
$$\int_4^9 e^{\sqrt{x}}\,dx =$$

A) $e^3 - e^2$ B) $16e^9 - 6e^4$ C) $2(2e^3 - e^2)$ D) $e^9 - e^4$

C

Domanda 7
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

A) $+\infty$ B) 0 C) $\dfrac{\pi}{2}$ D) 1

A

Domanda 8 Sia $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$. Allora $F'(1) =$

A) $e - \dfrac{e^2}{2}$ B) $3e^{\frac{1}{3}} - e$
C) $2e - e^2$ D) 0

C

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) $9e - 10e^{-2}$ B) $\dfrac{e^3 - 2}{e^2}$
C) $\dfrac{-1}{e^2}$ D) $\dfrac{e^2}{6} - \dfrac{7}{6e^4}$

B

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = 1 \\ y(4) = 3. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) -2 D) $\dfrac{9}{2}$

D

codice 795321

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 2 settembre 2016

Domanda 1 L'equazione $|1+i-z|^2+\bar{z}=1-i, \quad z\in\mathbb{C}$
A) ha due soluzioni distinte B) ha una sola soluzione
C) ha quattro soluzioni distinte D) non ha soluzione

A

Domanda 2 La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=(2x+\sin x)^3$
A) è iniettiva ma non surgettiva B) è bigettiva
C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

B

Domanda 3 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!}{n!\,(2n)!}=$$

A) $+\infty$ B) $e^{\frac{9}{4}}$ C) 0 D) $\frac{3}{2}$

A

Domanda 4 La successione $a_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$ definita per $n\geq 1$
A) non ha né massimo né minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 5 $$\overline{(1+i)}(1+i)^7=$$

A) $1+7i$ B) $-16i$ C) $7+7i$ D) $-2i$

B

Domanda 6 La funzione $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{\tan x}{x(1+\tan^2 x)}$
A) ha un asintoto verticale B) non ha asintoti
C) ha due asintoti verticali D) ha un asintoto obliquo

B

Domanda 7 $$\int_4^9 e^{\sqrt{x}}\,dx=$$

A) e^3-e^2 B) $16e^9-6e^4$ C) $2(2e^3-e^2)$ D) e^9-e^4

C

Domanda 8 $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=$$

A) $+\infty$ B) 0 C) $\frac{\pi}{2}$ D) 1

A

Domanda 9 Sia $F(x)=\displaystyle\int_{2x}^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$. Allora $F'(1)=$

A) $e-\dfrac{e^2}{2}$ B) $3e^{\frac{1}{3}}-e$
C) $2e-e^2$ D) 0

C

Domanda 10 La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin(\sin x)$
A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

A

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 2 settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x + \log x}{e^x - \log x}$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti, punti di massimo o di minimo locali, massimo e minimo o estremi superiore e inferiore. Tracciare un grafico approssimativo della funzione e dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Data la presenza del logaritmo, dobbiamo escludere tutte le $x \leq 0$. Inoltre dobbiamo controllare se il denominatore si annulla. Poniamo quindi $g(x) = e^x - \log x$ e studiamo l'equazione $g(x) = 0$. Dalla convessità della funzione esponenziale ricaviamo (tracciando la tangente in $x_0 = 0$)

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalla concavità della funzione logaritmo ricaviamo (tracciando la tangente in $x_0 = 1$)

$$\log x \leq x - 1 \qquad \forall x > 0.$$

Ne segue che

$$e^x \geq 1 + x > x - 1 \geq \log x \qquad \forall x > 0$$

quindi $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e la funzione f è definita per ogni $x > 0$. Proponiamo anche un metodo alternativo per vedere che g non si annulla mai. Abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

quindi la g, che è una funzione continua, ha minimo in $(0, +\infty)$. La funzione g è inoltre strettamente convessa, perchè differenza di una strettamente convessa e una strettamente concava, quindi il punto di minimo è unico. Denotiamo tale punto di minimo con x_0 e, per il teorema di Fermat, deve essere $g'(x_0) = 0$. Ma $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ quindi sarà $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$. Ne segue che $x_0 = \log \frac{1}{x_0} = -\log x_0$. Allora

$$g(x_0) = e^{x_0} - \log(x_0) = e^{x_0} + x_0 > 0$$

dato che $x_0 > 0$. La g ha quindi minimo strettamente positivo e di conseguenza non si annulla mai.
Vediamo ora i limiti della f:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x (\frac{e^x}{\log x} + 1)}{\log x (\frac{e^x}{\log x} - 1)} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x (1 + \frac{\log x}{e^x})}{e^x (1 - \frac{e^x}{\log x})} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$. Non ci sono né asintoti verticali né asintoti obliqui.
Valutiamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{(e^x + \frac{1}{x})(e^x \log x) - (e^x + \log x)(e^x - \frac{1}{x})}{(e^x - \log x)^2} = \frac{2e^x(\frac{1}{x} - \log x)}{(e^x - \log x)^2}.$$

Il segno di f' è determinato solo da quello di $\frac{1}{x} - \log x$. Poniamo allora $h(x) = \frac{1}{x} - \log x$ e osserviamo che h è strettamente decrescente dato che $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ per ogni $x > 0$. Inoltre

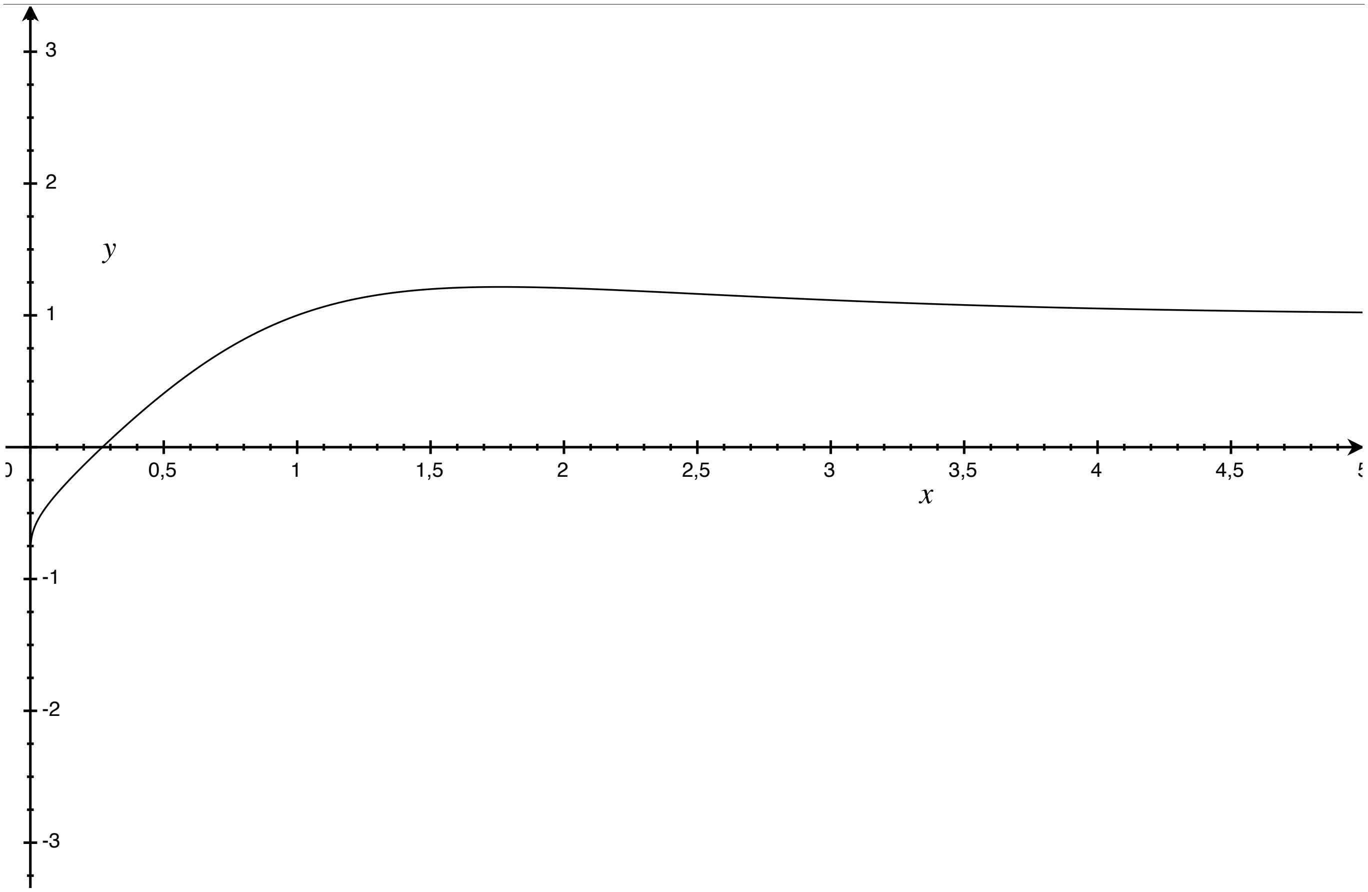
$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty.$$

Ne segue che esiste un unico punto x_1 tale che $h(x_1) = 0$. Avremo quindi che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, x_1), \qquad f'(x_1) = 0, \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (x_1, +\infty).$$

La funzione f è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(0, x_1]$ e strettamente decrescente in $[x_1, +\infty)$. Il punto x_1 è di massimo assoluto e $f(x_1)$ è il massimo di f; denotiamo con M tale valore. Dalla decrescenza di f in $[x_1, +\infty)$ segue subito che $M > 1$, dalla crescenza di f in $(0, x_1]$ abbiamo che $\inf(f) = -1$ e che la funzione non ha minimo. Avremo quindi che l'equazione $f(x) = k$ ha

- nessuna soluzione se $k \leq -1$
- 1 soluzione se $-1 < k \leq 1$
- 2 soluzioni se $1 < k < M$
- 1 soluzione se $k = M$
- nessuna soluzione se $k > M$.



Esercizio 2 Determinare la primitiva della funzione $f(x) = \tan^4 x$ che nel punto $x = \dfrac{\pi}{4}$ vale π.

Soluzione

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \tan^4 x \, dx$$

con la sostituzione $\tan x = t$. Invertendo la funzione otteniamo $x = \arctan t$ e $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$. L'integrale quindi diventa

$$\int \tan^4 x \, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} \, dt = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2+1} \, dt = \int \frac{(t^2+1)(t^2-1)}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \, dt = \int t^2 - 1 \, dt + \arctan t$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + c = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c.$$

Determiniamo ora la costante c imponendo che la funzione valga π quando $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\pi = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} + c \iff c = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}.$$

La primitiva cercata è quindi

$$F(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 x \log^2 x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili e, dato che $y(1) \neq 0$ possiamo dividere per y^2 ottenendo

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x \log^2 x \, dx + c.$$

Calcoliamo separatamente le due primitive:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

e integrando per parti due volte

$$\int x \log^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2 \frac{\log x}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4}.$$

Avremo quindi

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + c.$$

Calcoliamo ora la costante c imponendo la condizione iniziale:

$$-1 = \frac{1}{4} + c \iff c = -\frac{5}{4}.$$

Avremo allora

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2(2\log^2 x - 2\log x + 1) - 5}{4}$$

quindi

$$y(x) = \frac{4}{5 - x^2(2\log^2 x - 2\log x + 1)}.$$