Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 5 luglio 2016

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + e^x$

A) ha un asintoto obliquo B) ha un asintoto orizzontale
C) ha un asintoto verticale D) non ha asintoti

A

Domanda 2 L'insieme $A = \{x^2 \sin(x^2) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

A) è limitato B) è limitato superiormente ma non inferiormente
C) non è limitato né inferiormente né superiormente D) è limitato inferiormente ma non superiormente

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x||\sin x|$, nel punto $x = 0$

A) è continua ma non derivabile B) è derivabile due volte
C) non è continua D) è derivabile ma non è derivabile due volte

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

A) è limitata B) è debolmente crescente e non limitata
C) è debolmente decrescente e limitata inferiormente D) è limitata inferiormente ma non superiormente

A

Domanda 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

A) 0 B) non esiste C) $\sqrt{2}$ D) 2

D

Domanda 6

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log t \, dt =$$

A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) -1 D) 0

C

Domanda 7

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \sin(x^2) \cos(x^2) \, dx =$$

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{8}$ D) $1 + \sqrt{\pi}$

C

Domanda 8

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{1/x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

A) $+\infty$ B) 0 C) 2 D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -xy + x \\ y(2) = 5. \end{cases}$ Calcolare $y(1)$

A) $4e^{\frac{3}{2}} + 1$ B) $2e^{\frac{3}{2}}$ C) $e^{-\frac{1}{2}}$ D) $\dfrac{e^{-\frac{5}{2}}}{22}$

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 3. \end{cases}$ Calcolare $y(3)$

A) $3e^{\frac{17}{2}}$ B) 1 C) $3e^8$ D) $e^{\frac{9}{2}}$

C

codice 369265

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 5 luglio 2016

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + e^x$

A) ha un asintoto obliquo B) ha un asintoto verticale C) ha un asintoto orizzontale

D) non ha asintoti

A

Domanda 2 L'insieme $A = \{x^2 \sin(x^2) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

A) è limitato superiormente ma non inferiormente

B) è limitato C) è limitato inferiormente ma non superiormente

D) non è limitato né inferiormente né superiormente

D

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x||\sin x|$, nel punto $x = 0$

A) non è continua B) è derivabile ma non è derivabile due volte

C) è continua ma non derivabile D) è derivabile

D

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

A) è limitata inferiormente ma non superiormente B) è debolmente crescente e non limitata

C) è debolmente decrescente e limitata inferiormente D) è limitata

D

Domanda 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

A) non esiste B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 0

C

Domanda 6

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log t \, dt =$$

A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) -1

D

Domanda 7

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \sin(x^2) \cos(x^2) \, dx =$$

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $1 + \sqrt{\pi}$ D) 0

B

Domanda 8

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{1/x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $+\infty$ C) 2 D) 0

B

Domanda 9 L'equazione $i|z|^2 + \bar{z}(1 - z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$

A) ha due soluzioni B) non ha soluzioni C) ha una sola soluzione D) ha infinite soluzioni

A

Domanda 10

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 =$$

A) -1 B) $-i$ C) $\dfrac{1+i}{8}$ D) $\dfrac{1-i}{8}$

B

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 5 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

determinandone eventuali asintoti, compresi quelli obliqui, estremi superiore e inferiore, massimo e minimo, punti di massimo o di minimo locali. Determinare inoltre quanti sono i cambi di convessità e tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita e continua in tutta la retta reale quindi non vi sono asintoti verticali. Vediamo il limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{1+(-\infty)^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty}}{1+(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata che può essere facilmente risolta applicando due volte il teorema di de l'Hôpital ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dai risultati ottenuti concludiamo che c'è un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$. Potrebbe esserci un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(1+x^2)} = +\infty$$

ottenuto come prima applicando il teorema di de l'Hôpital tre volte. Non c'è quindi l'asintoto obliquo.
Sempre dai risultati sui limiti otteniamo che $\sup(f) = +\infty$ e che $\inf(f) = 0$, dato che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo ora i punti di massimo o minimo locali calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}.$$

Abbiamo quindi che la derivata prima è sempre strettamente positiva a parte nel punto $x = 1$ dove si annulla. La funzione è quindi monotona crescente in tutto $\mathbb{R}$ e non presenta punti di massimo o minimo locali.
Verifichiamo ora la convessità calcolando derivata seconda.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left[e^x(x-1)^2 + e^x 2(x-1)\right](1+x^2)^2 - e^x(x-1)^2 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^x(x-1)(1+x^2)[(x-1+2)(1+x^2) - 4x(x-1)]}{(1+x^2)^4} = \frac{e^x(x-1)(1+x^2)(x^3-3x^2+5x+1)}{(1+x^2)^4}. \end{aligned}$$

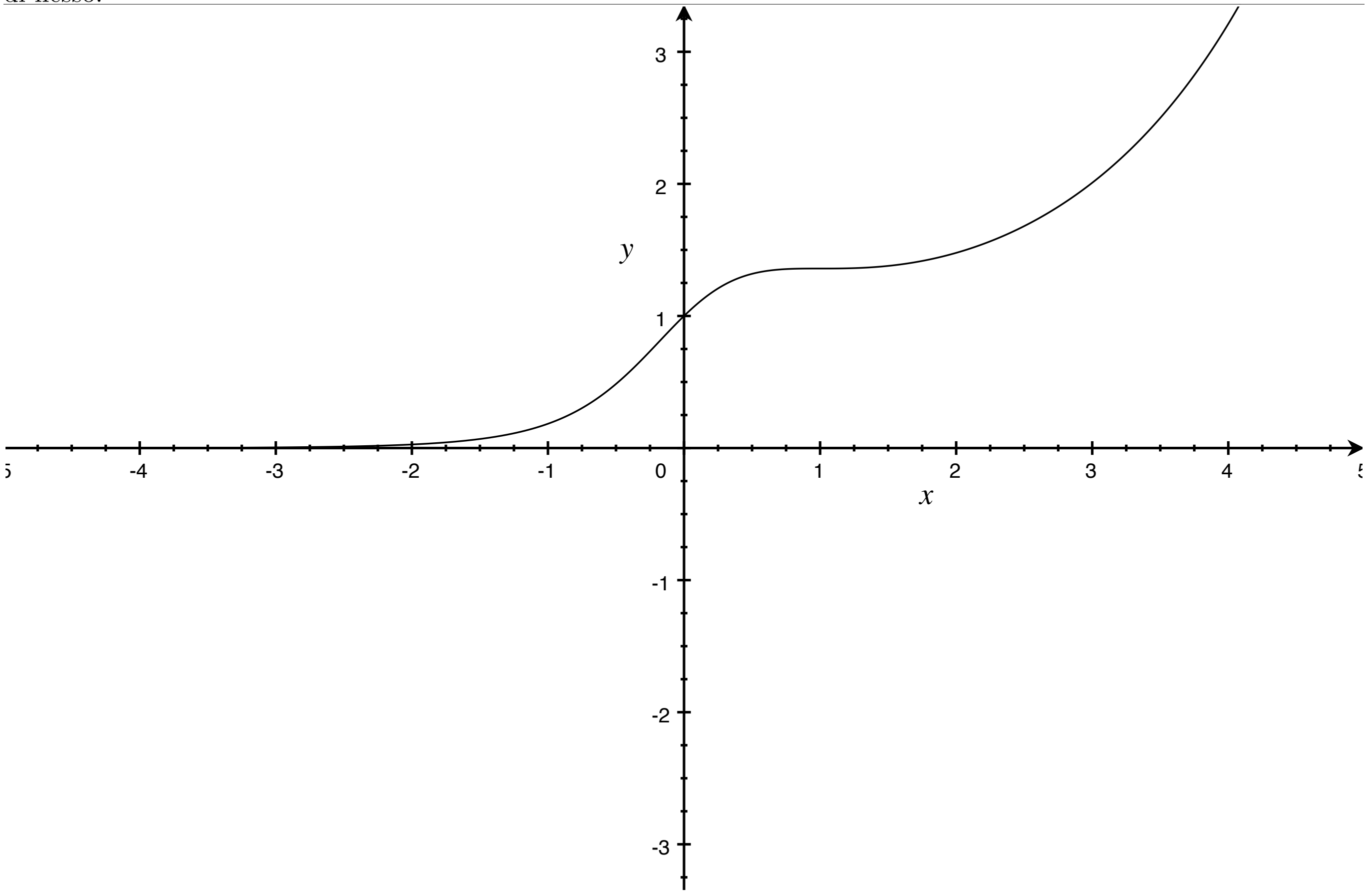
Il segno dipende solo da quello di $(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)$. Il polinomio di terzo grado $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ cambia segno almeno una volta essendo di grado dispari. Valutiamo ora

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

che non ha radici reali dato che il discriminante è negativo. Ne segue che $p(x)$ è strettamente crescente quindi ha una sola radice. Valutando $p(0) = 5$ si ottiene subito che esiste $x_0 < 0$ tale che $p(x_0) = 0$. In conclusione avremo che

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, x_0) \cup (1, +\infty), \qquad f''(x) < 0 \iff x \in (x_0, 1), \qquad f''(x_0) = f''(1) = 0$$

di conseguenza f è convessa in $(-\infty, x_0]$, concava in $[x_0, 1]$ e convessa in $[1, +\infty)$. I punti di ascissa x_0 e 1 sono punti di flesso.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\, dx.$$

Soluzione

Utilizziamo la formula di integrazione per parti integrando e^{3x} e derivando $\sin(2x)$:

$$\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\, dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{3x}}{3} 2\cos(2x)\, dx = 0 - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{3x}}{3} 2(-\sin(2x))\, dx\right)$$

$$= -\frac{2}{9}(e^{3\pi} - 1) - \frac{4}{9}\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\, dx$$

quindi

$$\frac{13}{9}\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\, dx = -\frac{2}{9}(e^{3\pi} - 1)$$

di conseguenza

$$\int_0^{\pi} e^{3x} \sin(2x)\, dx = -\frac{2}{13}(e^{3\pi} - 1).$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 9x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata $y'' - 6y' + 9y = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. L'unica radice del polinomio è $\lambda = 3$ quindi la soluzione dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

Ora determiniamo una soluzione particolare cercandola della forma

$$\overline{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Derivando e sostituendo nell'equazione abbiamo

$$\overline{y}' = 2Ax + B, \qquad \overline{y}'' = 2A$$

$$9x^2 = \overline{y}'' - 6\overline{y}' + 9\overline{y} = 2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) = 9Ax^2 + (9B - 12A)x + 2A - 6B + 9C.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 9A & & & = 9 \\ -12A & +9B & & = 0 \\ 2A & -6B & +9C & = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$A = 1, \qquad B = \frac{4}{3}, \qquad C = \frac{2}{3}.$$

La soluzione particolare cercata è quindi

$$\overline{y} = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

e la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y = y_0 + \overline{y} = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Determiniamo ora i coefficienti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali.

$$y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + 2x + \frac{4}{3}$$

quindi

$$y(0) = c_1 + \frac{2}{3}, \qquad y'(0) = 3c_1 + c_2 + \frac{4}{3}.$$

Abbiamo allora il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + \frac{2}{3} = 1 \\ 3c_1 + c_2 + \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$c_1 = \frac{1}{3}, \qquad c_2 = -\frac{7}{3}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{7xe^{3x}}{3} + x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}.$$