

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

Domanda 1 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$, definita per $n \geq 1$,

- A) ha massimo ma non ha minimo B) ha minimo ma non ha massimo
 C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

A

Domanda 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(-1)^n 5^n} =$

- A) non esiste B) $+\infty$ C) $\frac{3}{10}$ D) 0

D

Domanda 3 L'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

- A) ha 2 soluzioni B) ha una sola soluzione C) ha 3 soluzioni D) non ha soluzione

B

Domanda 4 La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \left(x - \frac{1}{|x|} \right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

- A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) ha minimo
 C) non ha né punti di massimo né punti di minimo locali D) ha massimo

C

Domanda 5 La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

- A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo
 C) ha minimo ma non ha massimo D) ha sia massimo che minimo

C

Domanda 6 $\int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{t} dt =$

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{8e^3}{3}$ D) $3e^2 - e$

A

Domanda 7 Se $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$ allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} =$

- A) 1 B) $+\infty$ C) non esiste D) 0

B

Domanda 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\int_0^x te^{-t^2} dt \right) =$

- A) $+\infty$ B) 1 C) non esiste D) $\sin \left(\frac{1}{2} \right)$

D

Domanda 9 Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + 1 + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ allora $y(0) =$

- A) 1 B) $2 - \frac{2}{e}$ C) 0 D) $\frac{4}{e} - 2$

D

Domanda 10 Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 10y' - 9y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ allora $y(1) =$

- A) e^4 B) $\frac{e^{-5+\sqrt{34}} - e^{-5-\sqrt{34}}}{2\sqrt{34}}$ C) $\frac{e^{\sqrt{34}} - 1}{2}$ D) $\frac{e^9 - e}{2}$

D

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

Domanda 1 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$

- A) non ha né massimo né minimo B) ha massimo ma non ha minimo C) ha sia massimo che minimo
D) ha minimo ma non ha massimo

B

Domanda 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(-1)^n 5^n} =$

- A) $\frac{3}{10}$ B) $+\infty$ C) 0 D) non esiste

C

Domanda 3 L'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

- A) non ha soluzione B) ha 3 soluzioni C) ha una sola soluzione D) ha 2 soluzioni

C

Domanda 4 La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \left(x - \frac{1}{|x|} \right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

- A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale
B) non ha né punti di massimo né punti di minimo locali C) ha massimo
D) ha minimo

B

Domanda 5 La funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

- A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 6 $\int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{t} dt =$

- A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8e^3}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $3e^2 - e$

A

Domanda 7 Se $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$ allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} =$

- A) 0 B) $+\infty$ C) non esiste D) 1

B

Domanda 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\int_0^x te^{-t^2} dt \right) =$

- A) $+\infty$ B) non esiste C) $\sin \left(\frac{1}{2} \right)$ D) 1

C

Domanda 9 L'equazione $z|z|^2 = i$, $z \in \mathbb{C}$

- A) ha 3 soluzioni B) ha 2 soluzioni C) ha una sola soluzione D) ha infinite soluzioni

C

Domanda 10 Le radici quadrate del numero complesso $-4 - 4\sqrt{3}i$ sono

- A) $z_1 = 2\sqrt{6} + 2i$, $z_2 = 2\sqrt{6} - 2i$ B) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$, $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$
C) $z_1 = 2 + 2\sqrt{6}i$, $z_2 = 2 - 2\sqrt{6}i$ D) $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$, $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right)$

D

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$ determinandone massimo, minimo, punti di massimo e di minimo locali e intervalli di convessità. Tracciare un grafico approssimativo della funzione. Trovare poi il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione è continua sul suo dominio quindi, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Calcoliamo la derivata e studiamone il segno.

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1).$$

Risulta che

$$\begin{aligned} \sin x > 0 &\iff x \in (0, \pi) \\ 2 \cos x - 1 > 0 &\iff \cos x > \frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), & f'(x) < 0 &\iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right), \\ f'_+(0) = f'_-(2\pi) &= f'(\pi) = f'(\frac{5\pi}{3}) = 0. \end{aligned}$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{3}]$, strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{3}, \pi]$, strettamente crescente in $[\pi, \frac{5\pi}{3}]$ e strettamente decrescente in $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$. I punti $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$ sono di minimo locale, i punti $x_4 = \frac{\pi}{3}, x_5 = \frac{5\pi}{3}$ sono di massimo locale. Il minimo della funzione è $f(\pi) = -1$ mentre il massimo è $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5}{4}$.

Calcoliamo ora la derivata seconda e valutiamone il segno per determinare la convessità.

$$f''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \cos x = 4 \cos^2 x - \cos x - 2.$$

Ponendo $t = \cos x$ otteniamo che

$$f''(x) > 0 \iff 4t^2 - t - 2 > 0 \iff t < \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ oppure } t > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}.$$

Osserviamo che $5 < \sqrt{33} < 6$ quindi $-1 < \frac{1 - \sqrt{33}}{8} < \frac{1 + \sqrt{33}}{8} < 1$. Poniamo quindi

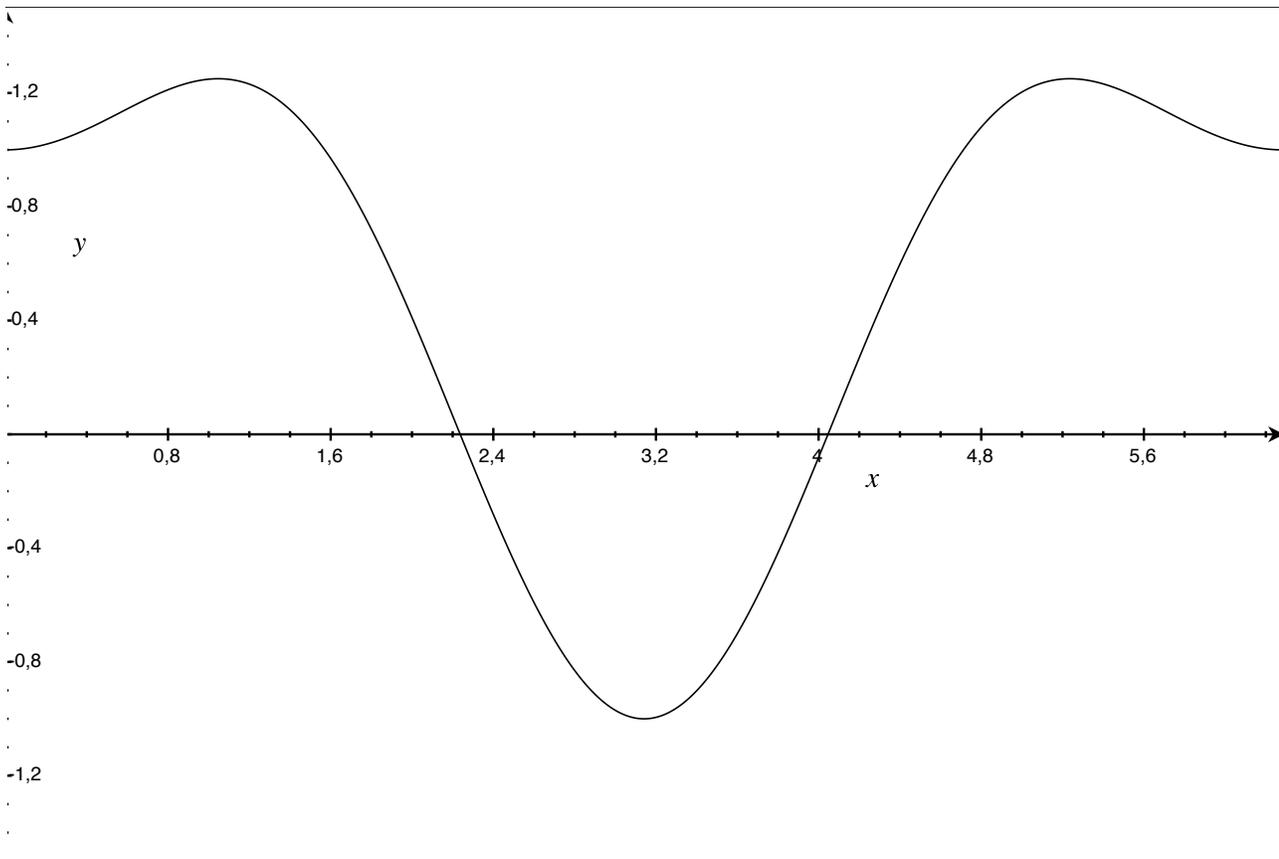
$$\alpha = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right), \quad \beta = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right).$$

Risulta quindi che

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff x \in [0, \alpha) \cup (\beta, 2\pi - \beta) \cup (2\pi - \alpha, 2\pi], & f''(x) < 0 &\iff x \in (\alpha, \beta) \cup (2\pi - \beta, 2\pi - \alpha) \\ f''(\alpha) = f''(\beta) = f''(2\pi - \beta) = f''(2\pi - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

La funzione è convessa in $[0, \alpha]$, concava in $[\alpha, \beta]$, convessa in $[\beta, 2\pi - \beta]$, concava in $[2\pi - \beta, 2\pi - \alpha]$ e convessa in $[2\pi - \alpha, 2\pi]$. I punti $x_6 = \alpha, x_7 = \beta, x_8 = 2\pi - \beta, x_9 = 2\pi - \alpha$ sono punti di flesso.

Dallo studio della monotonia della funzione e dal fatto che $f(0) = f(2\pi) = 1$ segue che l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzione se $k < -1$, ha una sola soluzione se $k = -1$, ha 2 soluzioni se $-1 < k < 1$, ha 4 soluzioni se $1 \leq k < \frac{5}{4}$, ha 2 soluzioni se $k = \frac{5}{4}$ e non ha soluzione se $k > \frac{5}{4}$.



Esercizio 2 Calcolare $\int_0^1 \frac{dx}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2}$.

Soluzione

Ricordiamo che

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

quindi

$$\frac{1}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2} = \frac{1}{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

Eseguiamo ora la sostituzione $e^{2x} = t$. Avremo quindi

$$x = \frac{\log t}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}.$$

Per quanto riguarda gli estremi di integrazione risulta che $x = 0 \iff t = 1$ e $x = 1 \iff t = e^2$ quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2} = \int_1^{e^2} \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}} dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{(t + \frac{1}{t})} \frac{dt}{2t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t^2 + 1} = \left[\arctan t \right]_1^{e^2} = \arctan(e^2) - \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y^3 \\ y(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili, quindi, dato che $y(1) \neq 0$, in un intorno di $x = 1$ risulterà $y \neq 0$ e possiamo dividere per y^3 . Otteniamo allora

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int 3x^2 dx + c.$$

Eseguendo le integrazioni abbiamo

$$-\frac{1}{2y^2} = x^3 + c.$$

Determiniamo ora la costante c imponendo la condizione iniziale

$$-\frac{1}{2(-\frac{1}{2})^2} = 1^3 = 3 \iff \frac{-4}{2} = 1 + c \iff c = -3.$$

La soluzione quindi sarà

$$-\frac{1}{2y^2} = x^3 - 3.$$

Ricaviamo la y tenendo conto del fatto che il valore nel punto iniziale è negativo: dovremo quindi scegliere la soluzione negativa dell'equazione ottenendo

$$2y^2 = \frac{1}{3 - x^3}, y < 0 \iff y = -\frac{1}{\sqrt{6 - 2x^3}}.$$