Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 30 marzo 2016

Domanda 1 La funzione $f(x) = \sin(\log(x^2))$, definita per ogni $x \neq 0$

A) è iniettiva B) ha un solo punto di minimo assoluto

C) ha infiniti punti di massimo locale D) non è limitata superiormente

C

Domanda 2 Sia $f(x) = \dfrac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+x^2}$ definita per ogni $x > 0$. Risulta che

A) f è limitata superiormente B) f è crescente

C) f non è limitata inferiormente D) f non ha massimo

D

Domanda 3 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\log(x^2+1)} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

A) è continua a sinistra B) è continua a destra C) è continua D) non è definita

A

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ definita per $n \geq 0$

A) non è limitata inferiormente B) è debolmente decrescente

C) ha sia massimo che minimo D) non ha limite

C

Domanda 5 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n}{n \log n}$, $n \geq 2$. Allora

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ B) a_n non è limitata inferiormente C) esiste finito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

D) da (a_n) si possono estrarre due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi

C

Domanda 6 Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n > 5\}$. Allora

A) A non ha né massimo né minimo B) A ha minimo ma non ha massimo

C) A ha massimo ma non ha minimo D) A ha sia massimo che minimo

B

Domanda 7 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1+\log x}{x \log x}\, dx =$

A) 1 B) $+\infty$ C) $1 + \log 2$ D) $\dfrac{e}{2}$

C

Domanda 8 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\sin(t^2))\, dt =$

A) 0 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $+\infty$ D) non esiste

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(2) = 10. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) $\sqrt{97}$ B) 2 C) 96 D) $\sqrt{2}$

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 5y' - \dfrac{11}{4}y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$ Allora $y(2) =$

A) $e - e^{\frac{11}{2}}$ B) $\dfrac{e^{12}-1}{2e^{11}}$ C) $\dfrac{3}{e^6 - 11}$ D) $\dfrac{11}{2}$

B

codice 2015-2016

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 30 marzo 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{(1 - \log x)^2}$$

determinandone insieme di definizione, massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo o minimo locali. Tracciare inoltre un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ data la presenza del logaritmo, inoltre dobbiamo escludere i valori per cui si annulla il denominatore, quindi $\log x = 1$ cioè $x = e$. L'insieme di definizione di f sarà pertanto $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo ora i limiti. Ricordando che, dal teorema di de l'Hôpital, $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$, avremo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{(1 - (-\infty))^2} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to e} f(x) = \frac{e\,1}{(1-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\log x$ si ottiene che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x - 2} = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale di equazione $x = e$ e non ha asintoti orizzontali. Potrebbe avere un asintoto obliquo. Per verificarne la presenza calcoliamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{(1 - \log x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Non c'è quindi nessun asintoto obliquo. Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = \frac{(\log x + x\frac{1}{x})(1 - \log x)^2 + x(\log x)2(1 - \log x)\frac{1}{x}}{(1 - \log x)^4} = \frac{(\log x + 1)(1 - \log x)^2 + 2\log x(1 - \log x)}{(1 - \log x)^4}$$

$$= \frac{(1 - \log x)\left((\log x + 1)(1 - \log x) + 2\log x\right)}{(1 - \log x)^4} = \frac{1 - \log^2 x + 2\log x}{(1 - \log x)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata.

$$(1 - \log x)^3 > 0 \iff \log x < 1 \iff x < e$$

ponendo $t = \log x$ otteniamo che

$$1 - \log^2 x + 2\log x \geq 0 \iff 1 - t^2 + 2t \geq 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq t \leq 1 + \sqrt{2} \iff e^{1-\sqrt{2}} \leq x \leq e^{1+\sqrt{2}}.$$

Combinando insieme il segno di numeratore e di denominatore otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff e^{1-\sqrt{2}} < x < e \text{ oppure } x > e^{1+\sqrt{2}}$$

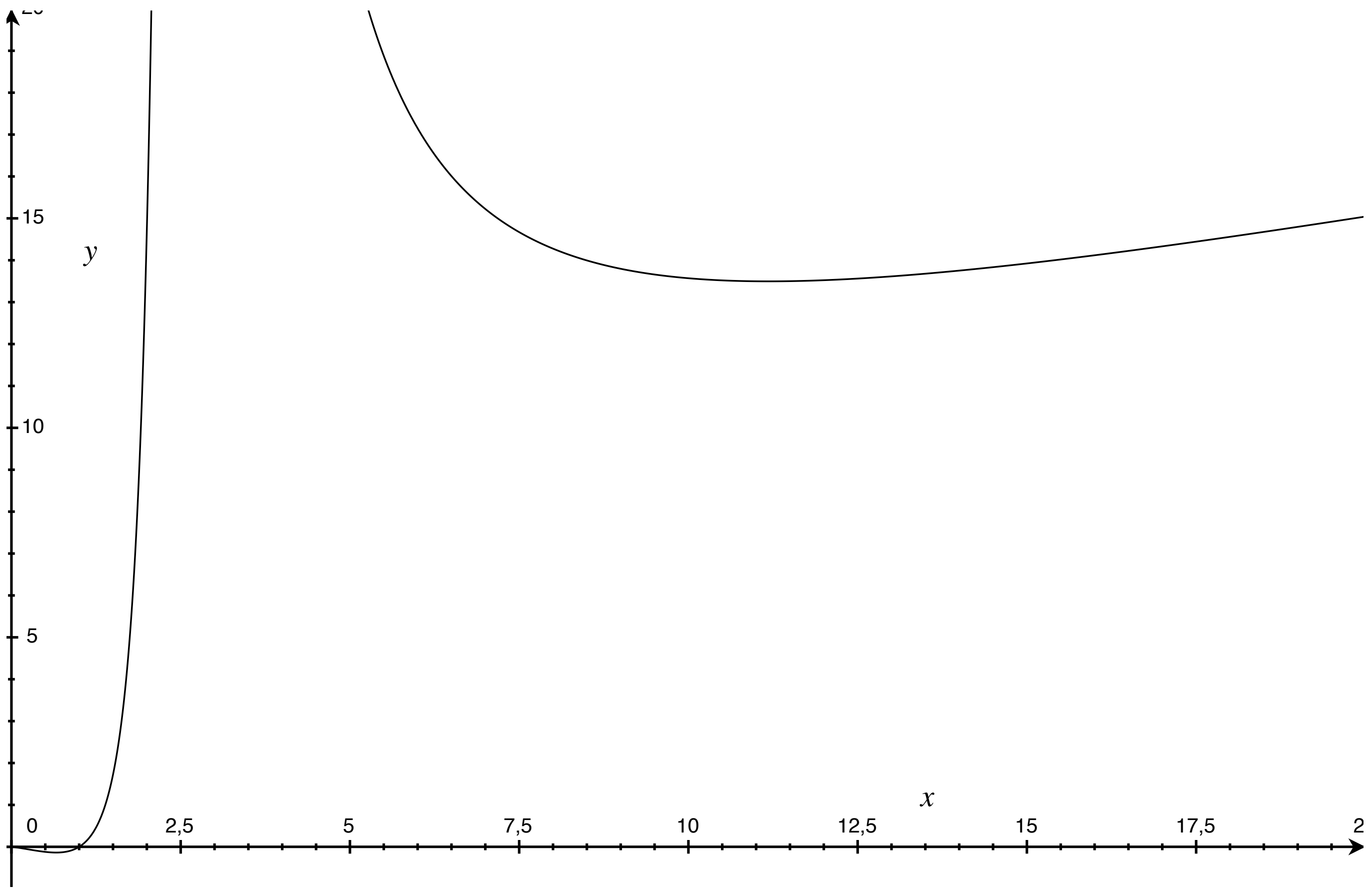
$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < e^{1-\sqrt{2}} \text{ oppure } e < x < e^{1+\sqrt{2}}$$

$$f'(e^{1-\sqrt{2}} = f'(e^{1+\sqrt{2}} = 0.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $\left(0, e^{1-\sqrt{2}}\right]$, strettamente crescente in $\left[e^{1-\sqrt{2}}, e\right)$, strettamente decrescente in $\left(e, e^{1+\sqrt{2}}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[e^{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$. I punti $x_1 = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x_2 = e^{1+\sqrt{2}}$ sono di minimo locale. La funzione assume il suo valore minimo nel punto di ascissa x_1 e tale minimo vale

$$\min(f) = f(x_1) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})}{2}.$$

La funzione non è superiormente limitata quindi $\sup(f) = +\infty$.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Soluzione

Effettuando la sostituzione $x = \log t$ avremo $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$ e gli estremi di integrazione diventano $t = 1$ quando $x = 0$ e $t = e$ quando $x = 1$. Avremo quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^x)}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_1^e \frac{\arctan t}{t + \frac{1}{t}}\, \frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{\arctan t}{t^2+1}\, dt.$$

Effettuiamo l'ulteriore sostituzione $z = \arctan t$, $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ con il cambiamento di estremi

$$t = 1 \iff z = \frac{\pi}{4}, \qquad t = e \iff z = \arctan e.$$

Avremo quindi

$$\int_1^e \frac{\arctan t}{t^2+1}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} z\, dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} = \frac{(\arctan e)^2}{2} - \frac{\pi^2}{32}.$$

Esercizio 3 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 1 \\ y(1) = \dfrac{e^2+2}{2e^2}. \end{cases}$$

Determinare il minimo di $y(x)$ per $x \in (0, +\infty)$.

Soluzione

L'equazione è lineare a coefficienti continui definiti per $x > 0$. Scriviamola nel modo canonico $y' = a(x)y + b(x)$ ponendo $a(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad b(x) = 1$. Cerchiamo una primitiva di $a(x)$:

$$A(x) = \int -\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = -2\sqrt{x}.$$

Calcoliamo ora, con la sostituzione $x = t^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$

$$\int e^{-A(x)b(x)}\, dx = \int e^{2\sqrt{x}}\, dx = \int e^{2t} 2t\, dt = e^{2t}t - \int e^{2t}\, dt = e^{2t}t - \frac{e^{2t}}{2} = \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2}.$$

Quindi

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x}} \left(\sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} + c \right) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + ce^{-2\sqrt{x}}.$$

Determiniamo ora c imponendo la condizione iniziale.

$$y(1) = 1 - \frac{1}{2} + ce^{-2}$$

quindi dovrà essere

$$1 - \frac{1}{2} + ce^{-2} = \frac{e^2+2}{2e^2} \iff \frac{e^2+2}{2e^2} - \frac{1}{2} = \frac{c}{e^2} \iff c = 1.$$

Ne segue che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{x}}.$$

Cerchiamo il minimo di $y(x)$ calcolando la derivata

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

quindi $y'(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \iff \frac{1}{2} > e^{-2\sqrt{x}} \iff \log\frac{1}{2} > -2\sqrt{x} \iff \frac{\log 2}{2}, \sqrt{x} \iff \frac{(\log 2)^2}{4} < x.$$

Abbiamo ottenuto che la funzione $y(x)$ è strettamente decrescente in $\left(0, \dfrac{(\log 2)^2}{4}\right]$ e strettamente crescente in $\left[\dfrac{(\log 2)^2}{4}, +\infty\right)$. Il punto $x = \dfrac{(\log 2)^2}{4}$ è quindi di minimo assoluto. Il minimo di $y(x)$ è quindi

$$y\left(\frac{(\log 2)^2}{4}\right) = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + e^{-2\frac{\log 2}{2}} = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\log 2}{2}.$$