Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2016

Domanda 1 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ allora: C

A) f è continua nel punto $x = 1$ B) $\lim_{n\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f(1)$ C) $\lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 4$ D) $f(1) = 4$

Domanda 2 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \ 3x - \frac{1}{x} > 0\right\}$ è: B

A) superiormente limitato B) inferiormente limitato C) vuoto D) limitato

Domanda 3 $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4} =$ B

A) $\frac{1}{e^4}$ B) $\frac{1}{256}$ C) $+\infty$ D) 0

Domanda 4 La successione $a_n = \frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^2+1}$ A

A) ha minimo B) ha due limiti C) non ha limite D) non è limitata superiormente

Domanda 5 C

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!+3}{n!}\right)^{-n!}$$

A) vale $+\infty$ B) non esiste C) vale $\frac{1}{e^3}$ D) vale 0

Domanda 6 Si consideri la successione $a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n}{n \log n}$, $n \geq 2$. Allora C

A) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ B) $\{a_n\}$ non è limitata inferiormente C) esiste finito $\lim_{n\to\infty} a_n$
D) da $\{a_n\}$ si possono estrarre due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi

Domanda 7 Sia $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$ allora B

A) $F''(x) = \int_1^{x^2} 2te^{t^2+1}\, dt$ B) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$ C) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$ D)$F''(x) = 2x \int_1^{x} e^{t^2+1}\, dt$

Domanda 8 $\int \frac{\cos(2\log x)}{x}\, dx =$ C

A) $-\frac{\sin(2\log x)}{x^2} + c$ B) $\log x \cos(2x)$+c C) $\sin(\log x)\cos(\log x) + c$ D) $\sin(2\log x)\log x + c$

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + x = y \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ Calcolare $y(5)$. D

A) $9e^5 + 5$ B) $5e^5 - 5$
C) $5e^5 + 4e^{-5}$ D) $4e^5 + 5e^{-5} + 5$

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 3. \end{cases}$ Calcolare $y(-2)$. C

A) 1 B) $-3e^{-4} + 4e^{-2}$ C) $\frac{e^2+4}{e^2}$ D) $\frac{e^3}{2}$

codice 267257

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2016

Domanda 1 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n}{n \log n}$, $n \geq 2$. Allora

A) da $\{a_n\}$ si possono estrarre due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi
B) $\{a_n\}$ non è limitata inferiormente
C) esiste finito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

C

Domanda 2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4} =$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{1}{e^4}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{256}$

D

Domanda 3 L'equazione $z^2 = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$
A) ha due soluzioni B) ha 4 soluzioni
C) ha una sola soluzione D) ha infinite soluzioni

B

Domanda 4

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!+3}{n!}\right)^{-n!}$$

A) non esiste B) vale 0 C) vale $\dfrac{1}{e^3}$ D) vale $+\infty$

C

Domanda 5 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \; 3x - \dfrac{1}{x} > 0\right\}$ è:
A) inferiormente limitato B) limitato C) superiormente limitato D) vuoto

A

Domanda 6 $(2\sqrt{3} - 2i)^{10} =$

A) $3^5 - 2^{10}$ B) 16^5 C) $4^{10}(\sqrt{3} - i)$ D) $2^{19}(1 + i\sqrt{3})$

D

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ allora:

A) $f(1) = 4$ B) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 4$ C) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = f(1)$ D) f è continua nel punto $x = 1$

B

Domanda 8 La successione $a_n = \dfrac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^2+1}$

A) ha minimo B) non è limitata superiormente C) non ha limite D) ha due limiti

A

Domanda 9 $\displaystyle\int \frac{\cos(2\log x)}{x}\, dx =$

A) $\log x \cos(2x)$+c B) $\sin(\log x)\cos(\log x) + c$ C) $-\dfrac{\sin(2\log x)}{x^2} + c$ D) $\sin(2\log x)\log x + c$

B

Domanda 10 Sia $F(x) = \int\limits_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$ allora

A) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$ B) $F''(x) = \int\limits_1^{x^2} 2te^{t^2+1}\, dt$ C)$F''(x) = 2x\int\limits_1^{x} e^{t^2+1}\, dt$ D) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$

D

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 8 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \log x}{\log^2 x}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (o estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

Per la presenza del logaritmo deve essere $x > 0$ inoltre il denominatore della frazione deve essere diverso da 0, quindi $x \neq 1$. Il dominio della funzione è quindi l'insieme $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \frac{1-0}{0^+} = +\infty.$$

Con il cambiamento di variabile $\log x = t$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1-t}{t^2} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \log x}{\log^2 x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1-t}{t^2} = 0.$$

La funzione presenta quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e uno orizzontale di equazione $y = 0$. La funzione non è superiormente limitata quindi $\sup(f) = +\infty$. Cerchiamo ora eventuali massimi e minimi locali valutando la derivata.

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}\log^2 x - (1-\log x)2(\log x)\frac{1}{x}}{\log^4 x} = \frac{-\log^2 x - 2\log x + 2\log^2 x}{x\log^4 x} = \frac{\log x - 2}{x\log^3 x}.$$

Il numeratore è positivo se e solo se

$$\log x > 2 \iff x > e^2$$

mentre il denominatore è positivo se e solo se

$$\log^3 x > 0 \iff x > 1$$

dato che nel dominio della funzione è sempre $x > 0$. Combinando insieme i due risultati otteniamo che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0,1) \cup (e^2,+\infty), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (1,e^2), \qquad f'(e^2) = 0.$$

La funzione è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(0,1)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(1,e^2]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[e^2,+\infty)$. Valutiamo la funzione nel punto di minimo locale $x = e^2$

$$f(e^2) = \frac{1 - \log e^2}{(\log e^2)^2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e che f è strettamente crescente in $(0,1)$ otteniamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Ne segue che $-\frac{1}{4}$ è il minimo della funzione.
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda:

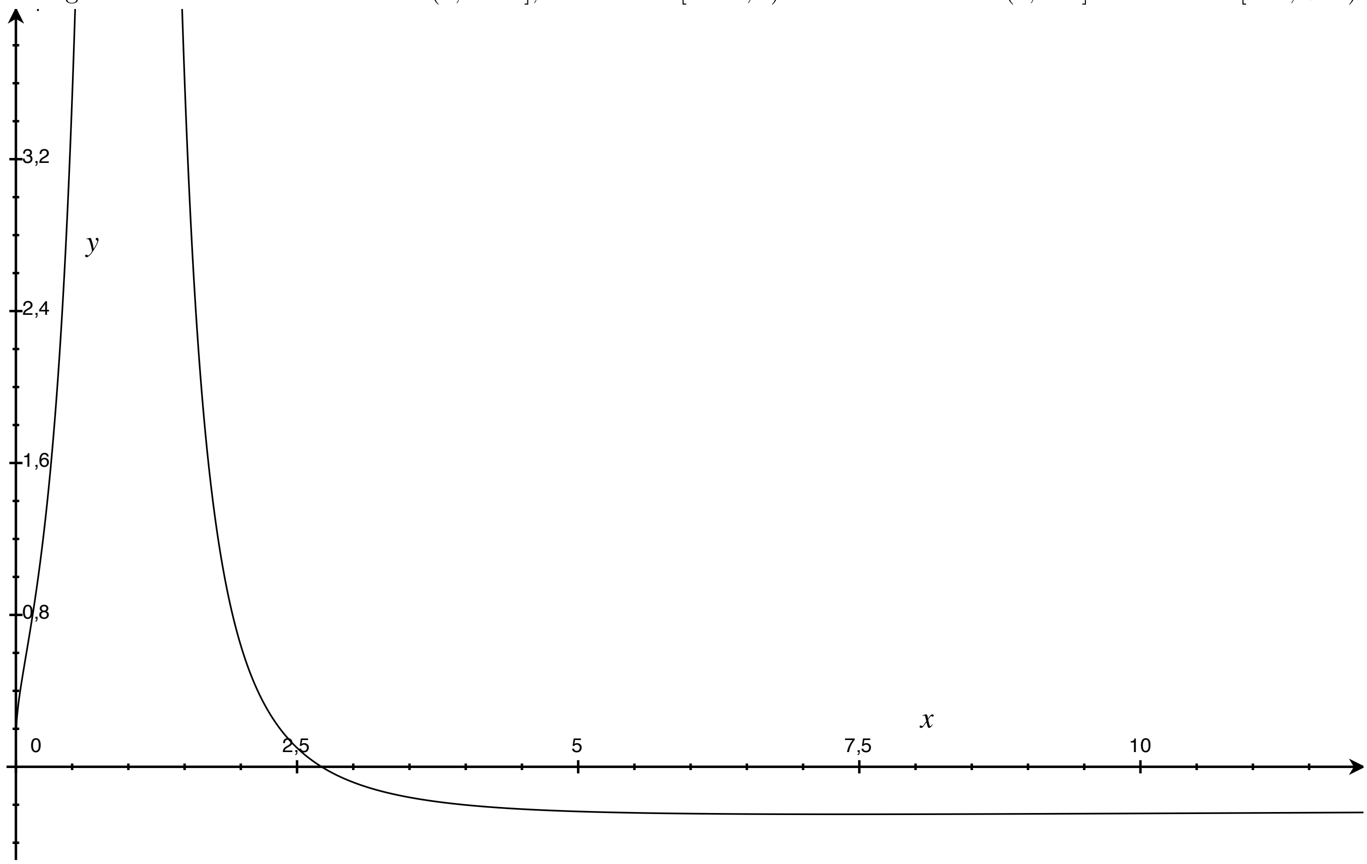
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}x\log^3 x - (\log x - 2)(\log^3 x + x\,3(\log^2 x)\frac{1}{x})}{x^2\log^6 x} = \frac{\log^3 x - (\log x - 2)(\log^2 x)(\log x + 3)}{x^2\log^6 x}$$

$$= \frac{\log^2 x\,(\log x - (\log x - 2)(\log x + 3))}{x^2\log^6 x} = \frac{\log x - \log^2 x - 3\log x + 2\log x + 6}{x^2\log^4 x} = \frac{-\log^2 x + 6}{x^2\log^4 x}.$$

Risulta quindi che $f''(x) > 0$ se e solo se

$$-\log^2 +6 > 0 \iff 6 > \log^2 x \iff |\log x| < \sqrt{6} \iff -\sqrt{6}x \log x < \sqrt{6} \iff e^{-\sqrt{6}} < x < e^{\sqrt{6}}.$$

Ne segue che la funzione è concava in $(0, e^{-\sqrt{6}}]$, convessa in $[e^{-\sqrt{6}}, 1)$ ancora convessa in $(1, e^{\sqrt{6}}]$ e concava in $[e^{\sqrt{6}}, +\infty)$.



Esercizio 2 Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Soluzione

Moltiplichiamo la funzione per 1 e integriamo per parti

$$\int 1 \cdot \log(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) dx$$

$$= x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}} \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx.$$

Calcoliamo ora l'ultimo integrale con la sostituzione $t = 1 + x^2,\ \ dt = 2x\, dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c = \sqrt{1 + x^2} + c.$$

Sostituendo il risultato otteniamo quindi

$$\int \log(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

Soluzione

Troviamo prima la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y''-2y'+2y=0$. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

che ha radici $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo si somiglianza. Dato che 1 non è radice del polinomio caratteristico non siamo in presenza di risonanza e la soluzione sarà del tipo

$$\bar{y}(x) = Ae^x.$$

Determiniamo A derivando $\bar{y}$ due volte

$$\bar{y}'(x) = Ae^x, \qquad \bar{y}''(x) = Ae^x$$

e sostituendo nell'equazione

$$Ae^x - 2Ae^x + 2Ae^x = e^x.$$

Quindi

$$Ae^x = e^x$$

e di conseguenza $A = 1$. Abbiamo ottenuto che

$$\bar{y}(x) = e^x$$

e la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x.$$

Determiniamo ora le costanti c_1 e c_2 derivando la soluzione e imponendo le condizioni iniziali.

$$y'(x) = e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x) + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x$$

$$y(0) = c_1 + 1, \qquad y'(0) = c_2 + c_1 + 1.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 3 \\ c_1 + c_2 + 1 = 7 \end{cases}$$

che ha soluzione $c_1 = 2,\ c_2 = 4$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = e^x(2\cos x + 4\sin x + 1).$$