Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 18 gennaio 2016

Domanda 1 $\lim_{x\to 0^+} \frac{2-2\cos x-\sin^2 x}{1-e^{x^4}} =$ B

A) $-\infty$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $+\infty$

Domanda 2 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)$ A

A) ha sia massimo che minimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata e non ha asintoti D) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

Domanda 3 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x\log x+e^x$ D

A) ha due punti di minimo locale e uno di massimo locale B) non ha né massimo né minimo
C) non è inferiormente limitata D) ha un solo punto di minimo locale

Domanda 4 L'insieme $A=\left\{n\in\mathbb{N}: n^2-10\log(n+2)<0\right\}$ B

A) non è superiormente limitato B) ha massimo
C) non ha minimo D) è superiormente limitato ma non ha massimo

Domanda 5 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{3^n\log^3 n}} =$ B

A) 0 B) $+\infty$ C) $\frac{1}{e^3}$ D) $e\log 3$

Domanda 6 La successione $a_n=\left(\frac{n^4+1}{n^2+3}\sin(n^n)-n^2\log n\right)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, definita per $n\geq 1$ A

A) ha massimo ma non ha minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

Domanda 7 Sia $F(x)=\int_{\log x}^{x} 3\sin t-2\cos t\,dt$. Allora $F'(1)=$ B

A) $3\sin 1-2\cos 1$ B) $3\sin 1-2\cos 1+2$ C) $3\cos 1+2\sin 1$ D) $3\cos 1+2\sin 1-3$

Domanda 8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx =$ B

A) $\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{3}$

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=2xy+3x \\ y(0)=1. \end{cases}$ Allora $y(1)=$ A

A) $\frac{5e-3}{2}$ B) $3+e$ C) $-\frac{3}{2}$ D) 5

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=y^{\frac{2}{5}} \\ y(1)=1. \end{cases}$ Allora $y(5)=$ C

A) $3^{\frac{5}{3}}$ B) $5^{\frac{2}{5}}$ C) $\left(\frac{17}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$ D) $11^{-\frac{5}{7}}$

codice 571759

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 18 gennaio 2016

Domanda 1 L'equazione di variabile complessa $|z-1| = |z-5|$ D

A) non ha soluzione B) ha soluzione unica C) ha due soluzioni D) ha infinite soluzioni

Domanda 2 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{3^n \log^3 n}} =$ B

A) 0 B) $+\infty$ C) $e \log 3$ D) $\frac{1}{e^3}$

Domanda 3 L'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 - 10\log(n+2) < 0\}$ A

A) ha massimo B) è superiormente limitato ma non ha massimo

C) non ha minimo D) non è superiormente limitato

Domanda 4 $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 =$ A

A) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{32} - i\frac{9\sqrt{3}}{32}$ C) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1

Domanda 5 Sia $F(x) = \int_{\log x}^{x} 3\sin t - 2\cos t\, dt$. Allora $F'(1) =$ B

A) $3\sin 1 - 2\cos 1$ B) $3\sin 1 - 2\cos 1 + 2$ C) $3\cos 1 + 2\sin 1 - 3$ D) $3\cos 1 + 2\sin 1$

Domanda 6 $\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{1 - e^{x^4}} =$ D

A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) 0 D) $-\frac{1}{4}$

Domanda 7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx =$ A

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$

Domanda 8 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)$ B

A) non è limitata e non ha asintoti B) ha sia massimo che minimo

C) è limitata ma non ha né massimo né minimo D) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

Domanda 9 La successione $a_n = \left(\frac{n^4+1}{n^2+3}\sin(n^n) - n^2 \log n\right)\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$, definita per $n \geq 1$ B

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) ha sia massimo che minimo D) non ha né massimo né minimo

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log x + e^x$ C

A) non è inferiormente limitata B) ha due punti di minimo locale e uno di massimo locale

C) ha un solo punto di minimo locale D) non ha né massimo né minimo

codice 2014/2015

Analisi Matematica A

Pisa, 18 gennaio 2016

| | | | | | | | | | | | | | | |
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = x|\log x|^{\log x}$ determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo e estremi superiore e inferiore, punti di massimo e di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza del logartimo deve essere $x > 0$ inoltre, dato che

$$|\log x|^{\log x} = e^{\log x \log|\log x|}$$

dovrà essere anche $|\log x| > 0$ quindi $x \neq 1$. L'insieme di definizione di f è pertanto $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Vediamo ora i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{\log x \log|\log x|} = \lim_{x\to 0^+} xe^{\log x \log(-\log x)} = 0e^{-\infty \log(+\infty)} = 0e^{-\infty} = 0.$$

Da questo limite e dal fatto che $f(x) > 0$ per ogni x del dominio, otteniamo che

$$\inf(f) = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} xe^{\log x \log|\log x|} = \lim_{x\to 1^-} xe^{\log x \log(-\log x)}$$

risolviamo quindi prima il seguente limite, che si presenta nella forma indeterminata $1 \cdot (-\infty)$, effettuando il cambiamento di variabile $t = -\log x$

$$\lim_{x\to 1^-} \log x \log(-\log x) = \lim_{t\to 0^+} -t \log t = 0$$

quindi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\, e^0 = 1.$$

Con procedimento analogo si verifica che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

Infine

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} xe^{\log x \log|\log x|} = \lim_{x\to +\infty} xe^{\log x \log(\log x)} = +\infty\, e^{+\infty \log(+\infty)} = \infty\, e^{+\infty} = +\infty.$$

La funzione non è limitata superiormente quindi

$$\sup(f) = +\infty.$$

Verifichiamo se è presente un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} |\log x|^{\log x} = +\infty$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo.

Calcoliamo ora la derivata. Ricordando che

$$\frac{d}{dt} \log|t| = \frac{1}{t} \qquad \forall t \neq 0$$

abbiamo che

$$\frac{d}{dx} \log|\log x| = \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}$$

quindi, per ogni $x > 0, x \neq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\log x\ \log|\log x|} + x e^{\log x\ \log|\log x|} \left(\frac{1}{x} \log|\log x| + \log x \frac{1}{\log x}\frac{1}{x} \right) \\ &= e^{\log x\ \log|\log x|} \left(\log|\log x| + 2 \right). \end{aligned}$$

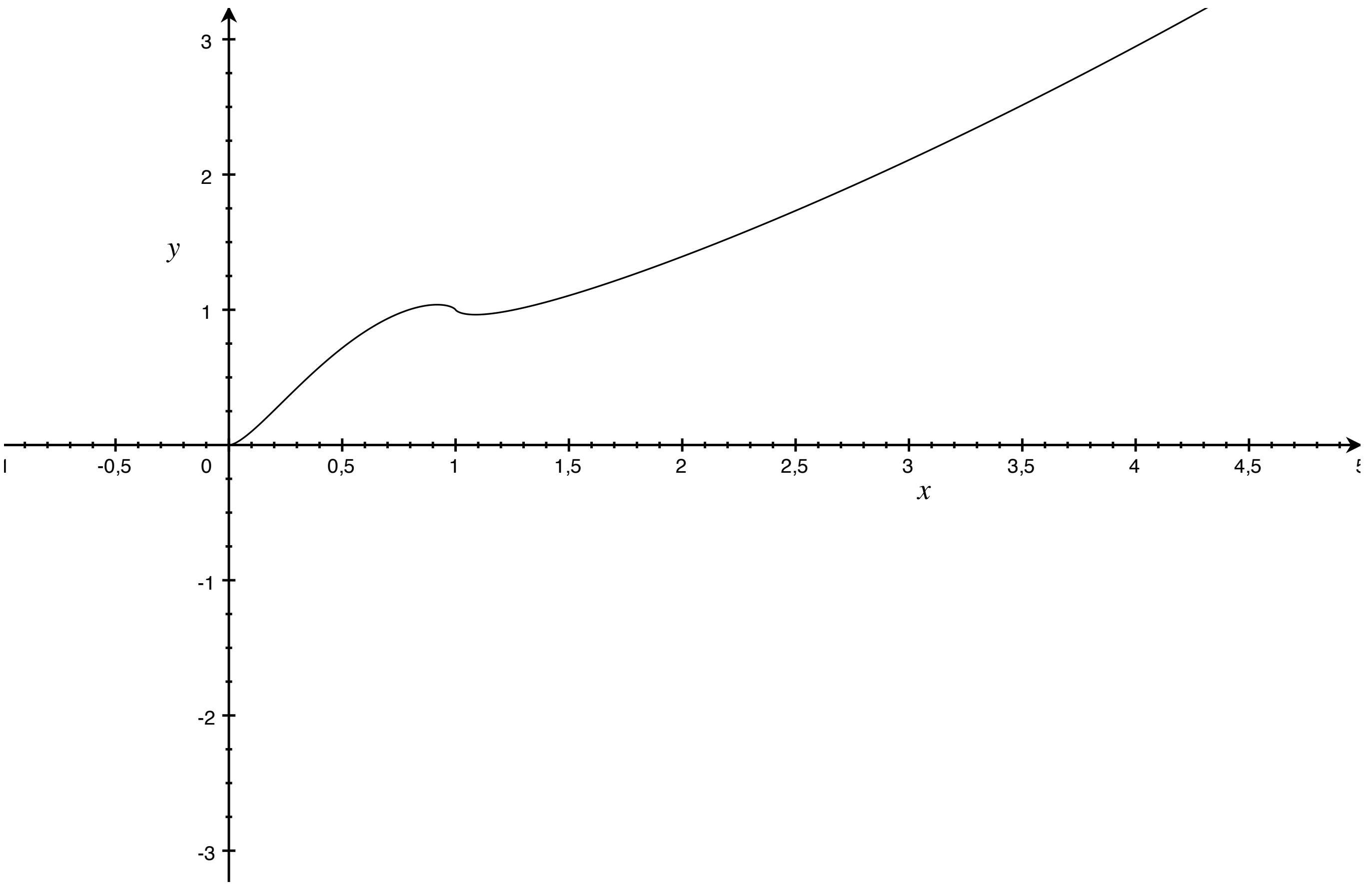
Ne segue che

$$f'(x) > 0 \iff \log|\log x| + 2 > 0 \iff \log|\log x| > -2 \iff |\log x| > e^{-2} \iff \log x > e^{-2} \text{ oppure } \log x < -e^{-2}$$

quindi

$$f'(x) > 0 \iff x > e^{e^{-2}} = e^{\frac{1}{e^2}} \text{ oppure } x < e^{-e^{-2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e^2}}}.$$

La funzione quindi è crescente in $\left(0, \frac{1}{e^{\frac{1}{e^2}}}\right]$, decrescente in $\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{e^2}}}, 1\right)$ ancora decrescente in $\left(1, e^{\frac{1}{e^2}}\right]$ e crescente in $\left[e^{\frac{1}{e^2}}, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{e^2}}}$ è di massimo locale mentre il punto $x = e^{\frac{1}{e^2}}$ è di minimo locale.



Esercizio 2 Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan\sqrt{x}$.

Soluzione

Integriamo per parti integrando la funzione 1 e derivando $\arctan\sqrt{x}$

$$\int 1 \cdot \arctan\sqrt{x}\, dx = x \arctan\sqrt{x} - \int x \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = x \arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale eseguiamo la sostituzione

$$\sqrt{x} = t, \qquad x = t^2, \qquad \frac{dx}{dt} = 2t, \qquad dx = 2t\, dt$$

quindi

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}2t\,dt = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int 1-\frac{1}{1+t^2}\,dt = t-\arctan t = \sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}.$$

Mettendo insieme i risultati abbiamo

$$\int \arctan\sqrt{x}\,dx = x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c.$$

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y\log y}{x} \\ y(-1) = 2. \end{cases}$$

Soluzione

Osserviamo che l'equazione differenziale ha senso se $y > 0$ e se $x \neq 0$. Dovendo trovare una soluzione locale in un intorno del punto iniziale di coordinate $(-1, 2)$ dovremo quindi considerare $x < 0$. L'equazione è a variabili separabili e presenta la soluzione costante $y = 1$ che annulla $\log y$. Dato che il valore iniziale è $y_0 = 2 \neq 1$, possiamo separare le variabili dividendo per $y\log y$ e integrare.

$$\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{dx}{x} + c$$

Con la sostituzione

$$t = \log y, \qquad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{dy}{y} = dt$$

otteniamo

$$\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\log y| = \log(\log y)$$

dato che $\log y > 0$ in un intorno del valore iniziale $y_0 = 2$. Analogamente abbiamo

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| = \log(-x)$$

perché $x_0 = -1 < 0$. Ne segue che

$$\log(\log y) = \log(-x) + c.$$

Ricaviamo la costante c dalla condizione iniziale $y(-1) = 2$

$$\log(\log 2) = (\log 1) + c = c$$

di conseguenza

$$\log(\log y) = \log(-x) + \log\log 2$$

$$\log y = -x\log 2$$

$$y(x) = e^{-x\log 2} = \left(e^{\log 2}\right)^{-x} = 2^{-x}.$$