Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 2 settembre 2015

Domanda 1 L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{8 - e^x}\,\log|x-1|$

A) ha massimo ma non ha minimo   B) è limitato ma non ha minimo
C) ha sia massimo che minimo   D) non è limitato né superiormente né inferiormente

A

Domanda 2 La funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt[4]{x}}$

A) ha massimo   B) è limitata ma non ha massimo
C) è limitata inferiormente ma non superiormente   D) è limitata superiormente ma non inferiormente

A

Domanda 3 Nel punto $x = 0$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) è continua ma non è derivabile   B) è derivabile
C) non è continua   D) è derivabile a destra ma non a sinistra

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{(\log(n+1))^{(-1)^n}}{n^3}$, definita per $n \geq 1$,

A) non è limitata inferiormente   B) ha sia massimo che minimo
C) ha massimo ma non ha minimo   D) non ha limite

C

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{\sin(n^2) + \sin(n) + 3}{n^2 + n + 1}$

A) ha sia massimo che minimo   B) è inferiormente ma non superiormente limitata
C) non ha né massimo né minimo   D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 6 L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

A) diverge positivamente   B) converge
C) diverge negativamente   D) non esiste

D

Domanda 7 L'integrale $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-1/x^2} - 1\,dx$

A) converge   B) diverge positivamente
C) non esiste   D) diverge negativamente

A

Domanda 8 La funzione $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)}$

A) ha un asintoto obliquo   B) ha massimo
C) ha un asintoto verticale e uno orizzontale   D) ha minimo

C

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+\sin n)^n}{n^2\, 2^n}$

A) converge   B) diverge negativamente
C) diverge positivamente   D) è indeterminata

A

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n n \sin(n^3) \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

A) diverge positivamente   B) converge ma non converge assolutamente
C) è indeterminata   D) converge assolutamente

D

codice 445976

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 2 settembre 2015

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}}$ determinandone insiemi di definizione e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo e di minimo locali. Tracciare anche un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

La funzione non ha quindi né massimo né minimo e

$$\sup(f) = \infty, \qquad \inf(f) = -\infty.$$

Controlliamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \infty$$

non ci sono quindi asintoti obliqui.

Vediamo ora gli intervalli di monotonia calcolando la derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x^2+3x+4)^{-\frac{1}{3}}(2x+3) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+3x+4+2(2x+3)x\right) \\ &= \frac{x^2+3x+4+4x^2+6x}{3x^{\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x^2+9x+4}{3x^{\frac{2}{3}}(x^2+3x+4)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $x^2+3x+4>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi l'unico punto dove si annulla il denominatore è $x=0$. Essendo f continua in $x=0$, per verificarne la derivabilità in tale punto è sufficiente calcolare il limite di f'

$$\lim_{x\to0} f'(x) = \frac{4}{0^+\,4^{\frac{1}{3}}} = \infty.$$

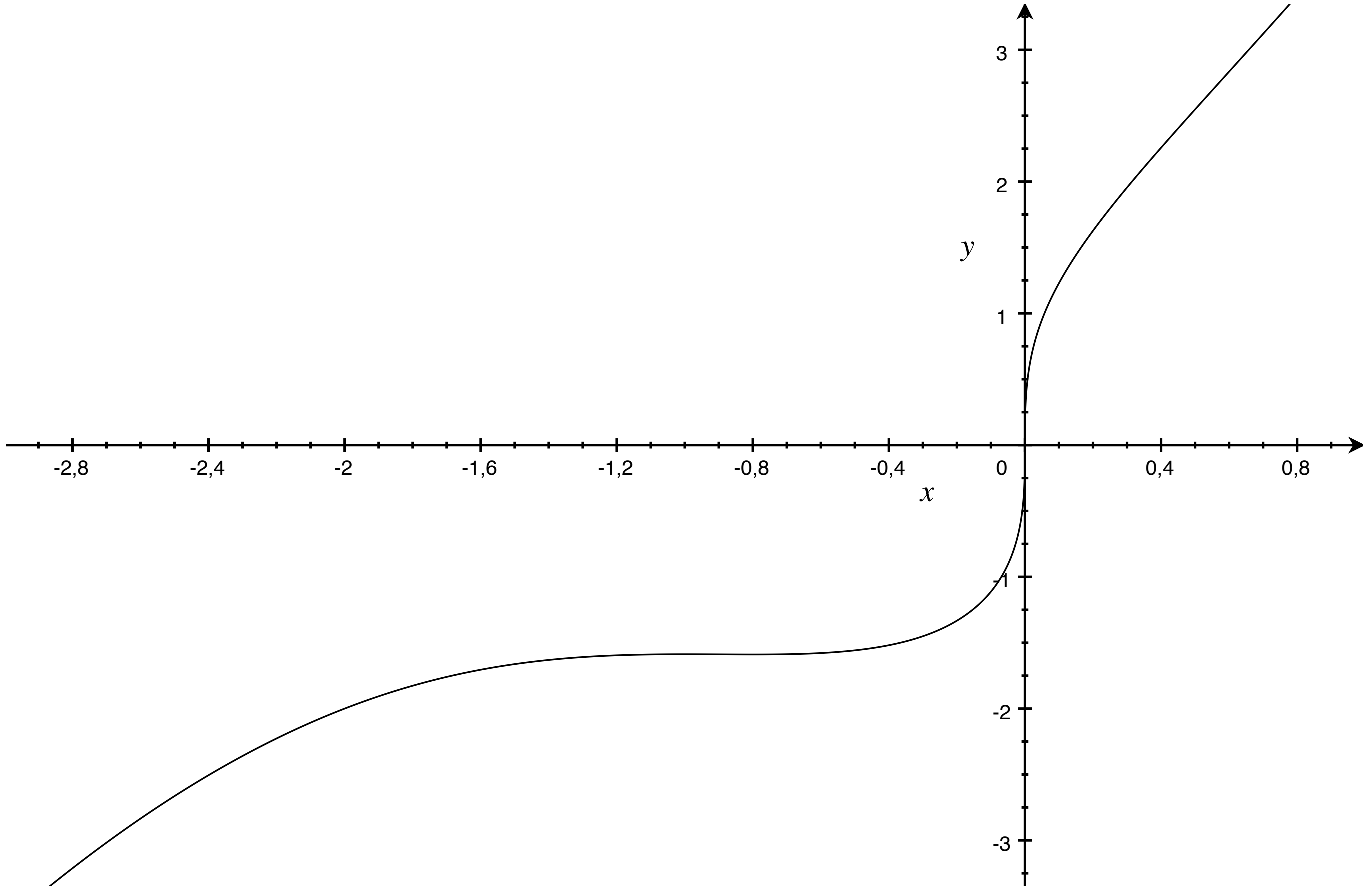
Ne segue che f non è derivabile in $x=0$ e ha retta tangente verticale. Il segno di f' è determinato unicamente dal suo numeratore, dato che il denominatore è sempre positivo.

$$5x^2+9x+4=0 \iff x = -\frac{4}{5} \text{ oppure } x=-1.$$

Quindi

$$f'(x)>0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{4}{5},\infty\right).$$

La funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty,-1]$, strettamente decrescente nell'intervallo $[-1,-\frac{4}{5}]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[-\frac{4}{5},\infty)$. Il punto $x=-1$ è di massimo locale mentre il punto $x=-\frac{4}{5}$ è di minimo locale.



Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento (convergenza, divergenza positiva o negativa) della serie

$$\sum_n \left(e^{\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}} - e^{\frac{1}{n}} \right).$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\alpha^2 n^2 + 3} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

quindi se $\alpha = 0$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}} - e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{3}} - e^{\frac{1}{n}} = e^{\infty} - e^0 = \infty$$

e la serie diverge positivamente.

Nel caso $\alpha \neq 0$ possiamo utilizzare lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale

$$e^t = 1 + t + o(t), \qquad t \to 0$$

prima con $t = \frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}$ poi con $t = \frac{1}{n}$. Osserviamo anche che, se $\alpha \neq 0$ allora

$$\frac{n+1}{\alpha^2 n^2 + 3} \sim \frac{1}{n}$$

quindi $o\left(\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} e^{\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}} - e^{\frac{1}{n}} &= 1 + \frac{n+1}{\alpha^2 n^2 + 3} + o\left(\frac{n+1}{\alpha^2 n^2 + 3}\right) - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(n+1)n - (\alpha^2+3)}{(\alpha^2 n^2 + 3)n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(1-\alpha^2)n^2 + n - 3}{(\alpha^2 n^2 + 3)n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Quindi se $\alpha^2 \neq 1$ si ha che

$$e^{\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}} - e^{\frac{1}{n}} \sim \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \frac{1}{n}$$

e, per il criterio del confronto asintotico, la serie non converge. In particolare, se $\alpha^2 < 1$ la serie è definitivamente a termini positivi quindi diverge positivamente mentre se $\alpha^2 > 1$ la serie diverge negativamente. Se invece $\alpha^2 = 1$ allora

$$e^{\frac{n+1}{\alpha^2 n^2+3}} - e^{\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

e la serie converge. In definitiva se $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ la serie diverge negativamente, se $\alpha = \pm 1$ la serie converge e se $\alpha \in (-1, 1)$ la serie diverge positivamente.