Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 20 luglio 2015

Domanda 1 La funzione $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x \sin(3x)}{\sin^2(2x)}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata né superiormente né inferiormente D) è limitata superiormente ma non inferiormente

D

Domanda 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2}}{\sin(x^{-\frac{1}{3}})} =$$

A) non esiste B) 0 C) $\dfrac{8}{3}$ D) $-\infty$

C

Domanda 3

$$\lim_{x\to\infty} \sin x \, \sin\frac{1}{x} =$$

A) 1 B) non esiste C) $+\infty$ D) 0

D

Domanda 4 La successione $a_n = n^2 e^{-\frac{1}{n}} \sin n$

A) tende a $+\infty$ B) non è limitata né inferiormente né superiormente
C) non ha limite ma è limitata D) non ha limite ma è limitata inferiormente

B

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{\sin n}{e^n - 1}$ definita per $n \geq 1$

A) non ha limite B) ha sia massimo che minimo
C) è limitata ma non ha massimo D) è debolmente crescente

B

Domanda 6

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

A) non esiste B) diverge negativamente C) converge D) diverge positivamente

C

Domanda 7

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} \int_1^{x^2} \frac{dt}{t^3+1} =$$

A) $+\infty$ B) non esiste C) 0 D) 1

C

Domanda 8

$$\int_1^2 x(\log x)^2\, dx =$$

A) $2(\log 2)^2$ B) $2(\log 2)^2 - 2\log 2$ C) $1 + 2(\log 2)^2 - 2\log 2$ D) $\dfrac{3}{4} + 2(\log 2)^2 - 2\log 2$

D

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)$

A) è indeterminata B) converge assolutamente
C) converge ma non converge assolutamente D) diverge positivamente

D

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi) + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$

A) è indeterminata B) converge assolutamente
C) converge ma non converge assolutamente D) diverge positivamente

C

codice 871693

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 20 luglio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^{2x}\sqrt[3]{x}$ determinandone insiemi di derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o eventualmente massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita e continua su tutta le retta reale ma potrebbe non essere derivabile in $x = 0$ a causa della radice cubica. Calcoliamone la derivata.

$$f'(x) = 2e^{2x}x^{\frac{1}{3}} + e^{2x}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = e^{2x}x^{-\frac{2}{3}}\left(2x + \frac{1}{3}\right).$$

Risulta che f' non è definita per $x = 0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = +\infty$$

quindi, dato che la funzione è continua in $x = 0$, risulta in tale punto non derivabile e strettamente crescente con tangente verticale. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^{-2x}} = \text{(Hôpital)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{-2e^{-2x}} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\infty}\infty = \infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$. Potrebbe avere un asintoto obliquo per $x \to \infty$, verifichiamolo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \text{(Hôpital)} \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$$

quindi non ci sono asintoti obliqui. Non ci sono ovviamente asintoti verticali perché la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Dai limiti otteniamo anche che la funzione non ha massimo e $\sup(f) = +\infty$.

Vediamo ora la monotonia studiando il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \iff 2x + \frac{1}{3} > 0 \iff x > -\frac{1}{6}$$

dato che e^{2x} e $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ sono sempre positive. La funzione è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[-\frac{1}{6}, +\infty)$. Osserviamo a questo proposito che, pur essendo la funzione non derivabile in $x = 0$, in tale punto è continua ed è strettamente crescente sia sull'intervallo $[-\frac{1}{6}, 0]$ che sulla semiretta $[0, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = -\frac{1}{6}$ è di minimo assoluto e

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = e^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{6e}}.$$

Quindi $\min(f) = \frac{-1}{\sqrt[3]{6e}}$.

Vediamo infine la convessità calcolando la derivata seconda (la funzione non ha derivata seconda in $x = 0$ dato che non ha neanche derivata prima)

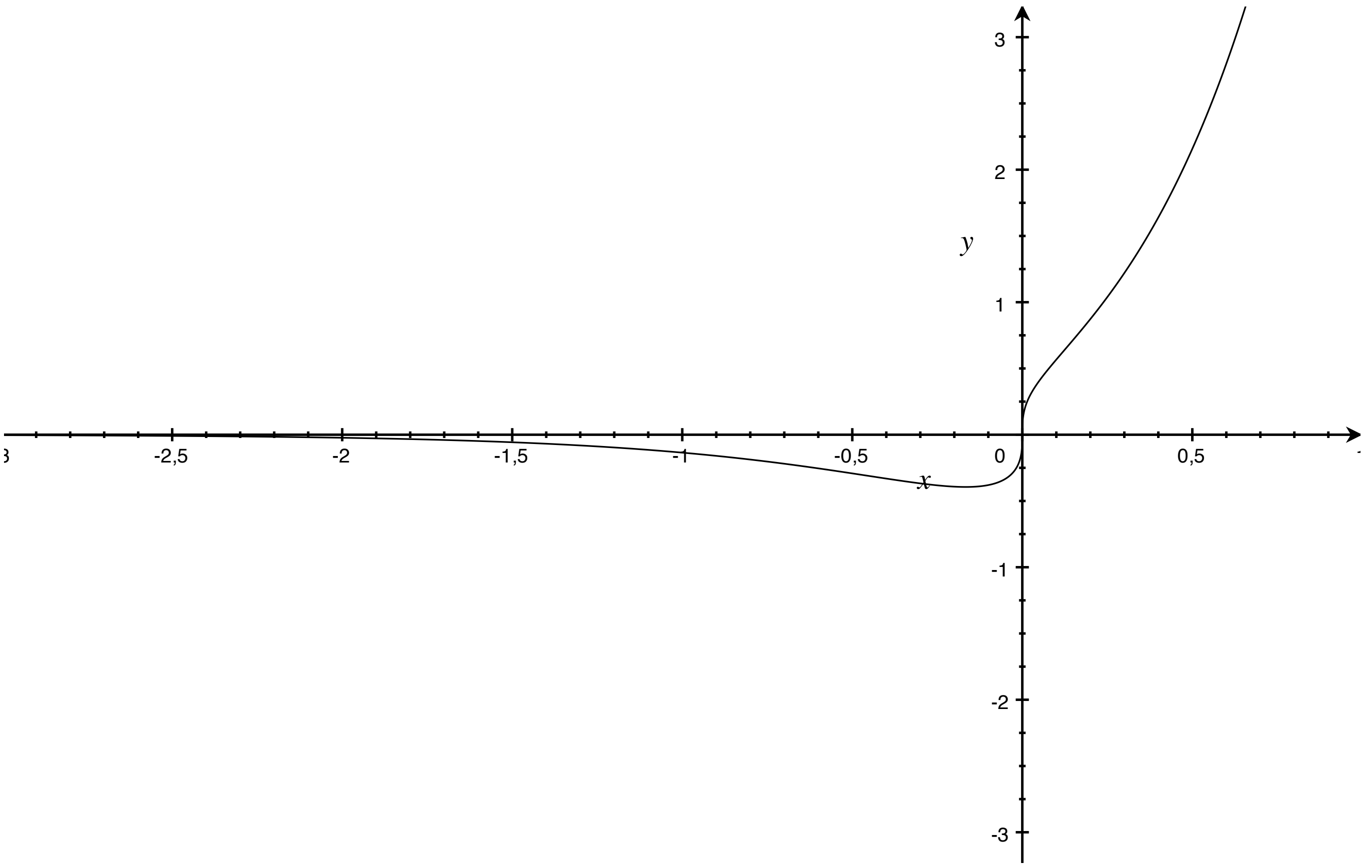
$$f''(x) = 2e^{2x}\left(2x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) + e^{2x}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\right) = e^{2x}x^{-\frac{5}{3}}\left(4x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}\right).$$

Risulta che

$$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^{-\frac{5}{3}} > 0 \iff x > 0$$

$$4x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9} > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{6}, \infty\right).$$

Mettendo insieme i risultati otteniamo che la funzione è concava sulla semiretta $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{6}]$, convessa nell'intervallo $[\frac{-1-\sqrt{3}}{6}, 0]$, concava nell'intervallo $[0, \frac{-1+\sqrt{3}}{6}]$ e di nuovo convessa sulla semiretta $[\frac{-1+\sqrt{3}}{6}, \infty)$. I punti di ascissa $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{6}$, $x = 0$, $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ sono punti di flesso.



Esercizio 2 Stabilire il comportamento dell'integrale generalizzato (convergenza, divergenza positiva o divergenza negativa)

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - \alpha \log x\right)\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Esaminiamo prima l'andamento della funzione integranda all'infinito. Risulta che

$$\log(1+x^2) - \alpha \log x = \log\left(\frac{1+x^2}{x^\alpha}\right)$$

e che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{1+x^2}{x^\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 0 & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty$ otteniamo subito che

$$\int_1^\infty \sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - \alpha \log x\right)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Se invece $\alpha = 2$, utilizzando lo sviluppo di Taylor del logaritmo, otteniamo, per $x \to \infty$, quindi $\frac{1}{x^2} \to 0$

$$\sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - 2\log x\right) = \sqrt{x}\log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = \sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

e per il criterio del confronto asintotico l'integrale

$$\int_1^\infty \sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - 2\log x\right)\,dx$$

converge. Per quanto riguarda il comportamento in un intorno destro di 0 si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - \alpha\log x\right) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log(1+x^2) - \alpha \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = 0\,\log 1 + \alpha\, 0 = 0$$

avendo sfruttato il limite, ottenuto ad esempio con il Teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0.$$

La funzione integranda è quindi limitata in un intorno destro di 0 e l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}\left(\log(1+x^2) - \alpha\log x\right)\,dx$$

converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ essendo un integrale di Riemann.

Considerando il comportamento sia in 0 che all'infinito si ottiene che l'integrale proposto diverge positivamente per $\alpha < 2$, converge per $\alpha = 2$ e diverge negativamente per $\alpha > 2$.