Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

# Analisi Matematica I

Pisa, 29 giugno 2015

**Domanda 1** La funzione $f : \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(\log(\tan x))$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è surgettiva ma non iniettiva
C) non è né iniettiva né surgettiva D) è bigettiva

D

**Domanda 2** La funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log x}{2x+1}$

A) ha sia massimo che minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

**Domanda 3** La funzione $f(x) = \dfrac{3x + \sin x}{2x - \cos x}$ nel suo insieme di definizione

A) ha un asintoto orizzontale e uno verticale B) non ha asintoti
C) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto D) ha un asintoto obliquo

A

**Domanda 4**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!\, n^{\frac{1}{n}}} =$$

A) $e^3$ B) $+\infty$ C) 0 D) non esiste

C

**Domanda 5** La successione $a_n = \log\left(1 + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+2}\right)$

A) non ha né massimo né minimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) ha sia massimo che minimo

A

**Domanda 6**

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x^2+3}\, dx =$$

A) $\left(\dfrac{1-\log 2}{2}\right)\log 3 + \dfrac{\pi}{4\log 3}$ B) $\dfrac{\log 6}{2} + \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\log 3}{2}$ C) $\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$ D) $\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{\pi}{9}$

C

**Domanda 7**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx$$

A) diverge negativamente B) converge C) non esiste D) diverge positivamente

C

**Domanda 8**

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$$

A) non esiste B) diverge positivamente C) converge D) diverge negativamente

C

**Domanda 9**

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{n\sqrt{\log n}}$$

A) converge ma non converge assolutamente B) diverge positivamente
C) converge assolutamente D) è indeterminata

C

**Domanda 10**

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4 + \sin\frac{1}{n}}{n^2 + 3\sqrt{n} + \cos n}\right) n$$

A) converge assolutamente B) diverge negativamente C) è indeterminata D) diverge positivamente

D

**codice 376316**

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

# Analisi Matematica I

Pisa, 29 giugno 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}\, e^x$ determinandone insieme di definizione, asintoti (orizzontali, verticali e obliqui), massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore, punti di massimo o minimo locali e convessità a $\pm\infty$.

## Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 2$ quindi sull'insieme $A = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ e in tale insieme è continua e derivabile infinite volte. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1\ e^{-\infty} = 1 \cdot 0^+ = 0^+$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} e^2 = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} e^2 = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1\ e^{\infty} = \infty.$$

Da quanto trovato si deduce immediatamente che la funzione non è limitata né superiormente né inferiormente quindi non ha né massimo né minimo e

$$\inf(f) = -\infty, \qquad \sup(f) = \infty.$$

La funzione presenta un asintoto orizzontale a $-\infty$ di equazione $y = 0$ e uno verticale di equazione $x = 2$. Verifichiamo l'esistenza di uneventuale asintoto obliquo a $+\infty$ (quello a $-\infty$ non pu esserci dato che c' quello orizzontale).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(x+1)}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

quindi non ci sono asintoti obliqui. Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = e^x \frac{x+1}{x-2} + e^x \frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} = e^x \frac{x^2-x-5}{(x-2)^2}.$$

Il segno della derivata è determinato da quello del trinomio $x^2 - x - 5$, essendo gli altri fattori positivi.

$$x^2 - x - 5 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

quindi

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, 2\right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right).$$

La funzione è quindi strettamente crescente sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right]$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}, 2\right)$, strettamente decrescente nell'intervallo $\left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$ e strettamente crescente sulla semiretta $\left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$. Il punto $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ è di massimo locale mentre $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ è di minimo locale. Vediamo ora la derivata seconda per la convessità

$$f''(x) = e^x \left( \frac{x^2-x-5}{(x-2)^2} + \frac{(2x-1)(x-2)^2 - (x^2-x-5)2(x-2)}{(x-2)^4} \right).$$

Risulta immediato che il segno della derivata seconda è determinato dal segno della funzione razionale in parentesi e che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-5}{(x-2)^2} + \frac{(2x-1)(x-2)^2-(x^2-x-5)2(x-2)}{(x-2)^4} = 1+0>0$$

quindi, per il teorema sulla permanenza del segno, $f''(x) > 0$ sia in un intorno di $-\infty$ che di $+\infty$ e di conseguenza la funzione è convessa in tali intorni.

**Esercizio 2** Studiare la convergenza, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!n^3}{n^{\alpha n}}.$$

**Soluzione**

La serie è a termini positivi, applicheremo quindi il criterio del rapporto. Ponendo $a_n = \dfrac{n!n^3}{n^{\alpha n}}$ risulta

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^3}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}\,\frac{n^{\alpha n}}{n!n^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3}(n+1)\frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}\\ &= \frac{(n+1)^3}{n^3}\frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha n+\alpha-1}} = \frac{(n+1)^3}{n^3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha n}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-\alpha}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\\ = e^{-\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1\\ e^{-1} & \text{se } \alpha = 1\\ \infty & \text{se } \alpha < 1.\end{cases}$$

Dato che $e^{-1} < 1$, per il criterio del rapporto, la serie converge se $\alpha \geq 1$ e diverge positivamente se $\alpha < 1$.