Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 giugno 2015

Domanda 1 La funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$

A) ha un asintoto obliquo B) ha un asintoto verticale
C) ha un asintoto orizzontale D) non ha asintoti di nessun tipo

A

Domanda 2 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$

A) diverge negativamente B) converge ma non converge assolutamente
C) diverge positivamente D) converge assolutamente

C

Domanda 3 L'insieme $\left\{ \dfrac{x}{x-1} : x \in \mathbb{R},\, x > 1 \right\}$ è

A) limitato B) limitato superiormente ma non inferiormente
C) non limitato né inferiormente né superiormente D) limitato inferiormente ma non superiormente

D

Domanda 4 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - 2\alpha x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$

A) se $\alpha = \dfrac{1}{2}$ B) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$ C) se $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ D) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

B

Domanda 5 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^\infty \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{3/2} dx$

A) converge B) non esiste C) diverge positivamente D) diverge negativamente

A

Domanda 6 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{2\log n}}$

A) converge ma non converge assolutamente B) diverge positivamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

C

Domanda 7 La successione $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{2n}$

A) è debolmente crescente e non limitata B) è debolmente decrescente e limitata inferiormente
C) è limitata D) è limitata inferiormente ma non superiormente

C

Domanda 8 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^2(\log(1+x) - x)}\, dx$

A) diverge positivamente B) converge C) non esiste D) diverge negativamente

D

Domanda 9 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x-3}\, dx =$

A) $1 - 4\log 2$ B) non esiste C) $1 + \log 16$ D) $\log 3$

A

Domanda 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{3^n + (-6)^n} =$$

A) 0 B) non esiste C) 1 D) -1

A

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log(x - \log x)$ determinandone insieme di definizione, estremi superiore e inferiore o eventualmente massimo e minimo, punti di massimo e di minimo locali e asintoti (compresi quelli obliqui). Dimostrare inoltre che la funzione ha almeno un cambio di convessità.

Soluzione

La funzione è definita se $x > 0$ e $x - \log x > 0$. Per quanto riguarda la seconda disuguaglianza osserviamo che la funzione logaritmo è concava, quindi il suo grafico sta sotto le sue rette tangenti. Calcolando la tangente nel punto $x = 1$ si ottiene che

$$\log x \leq 0 + 1(x - 1) = x - 1 < x$$

quindi $x - \log x > 0$ per ogni $x > 0$. L'insieme di definizione di f risulta quindi essere $(0, \infty)$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log(0^+ - \log(0^+)) = \log(0^+ - (-\infty)) = \log(\infty) = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right)\right) = \log(x(1-0)) = \infty$$

dove si è sfruttato il limite notevole $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ facilmente ottenibile con il teorema di de L'Hôpital.

La funzione quindi ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 0$, non ha massimo e il suo estremo superiore è ∞. Non ci sono asintoti orizzontali ma ci potrebbe essere un asintoto obliquo. Per calcolare il limite $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ osserviamo che, se x è abbastanza grande (ad esempio $x \geq 1$), risulta $\log x \geq 0$, quindi, dalla monotonia della funzione logaritmo si ottiene

$$0 \leq \frac{\log(x - \log x)}{x} \leq \frac{\log x}{x}.$$

Applicando il teorema dei carabinieri si ha quindi che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

e non ci sono asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \log x} = \frac{x-1}{x(x - \log x)}.$$

Abbiamo già visto che $x - \log x > 0$, quindi risulta che

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) > 0 \iff x > 1.$$

La funzione è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 1]$, strettamente crescente sulla semiretta $[1, \infty)$ e il punto $x = 1$ è di minimo assoluto. Il minimo della funzione vale quindi $f(1) = \log(1 - \log 1) = 0$.

Calcoliamo ora la derivata seconda per valutare la convessità.

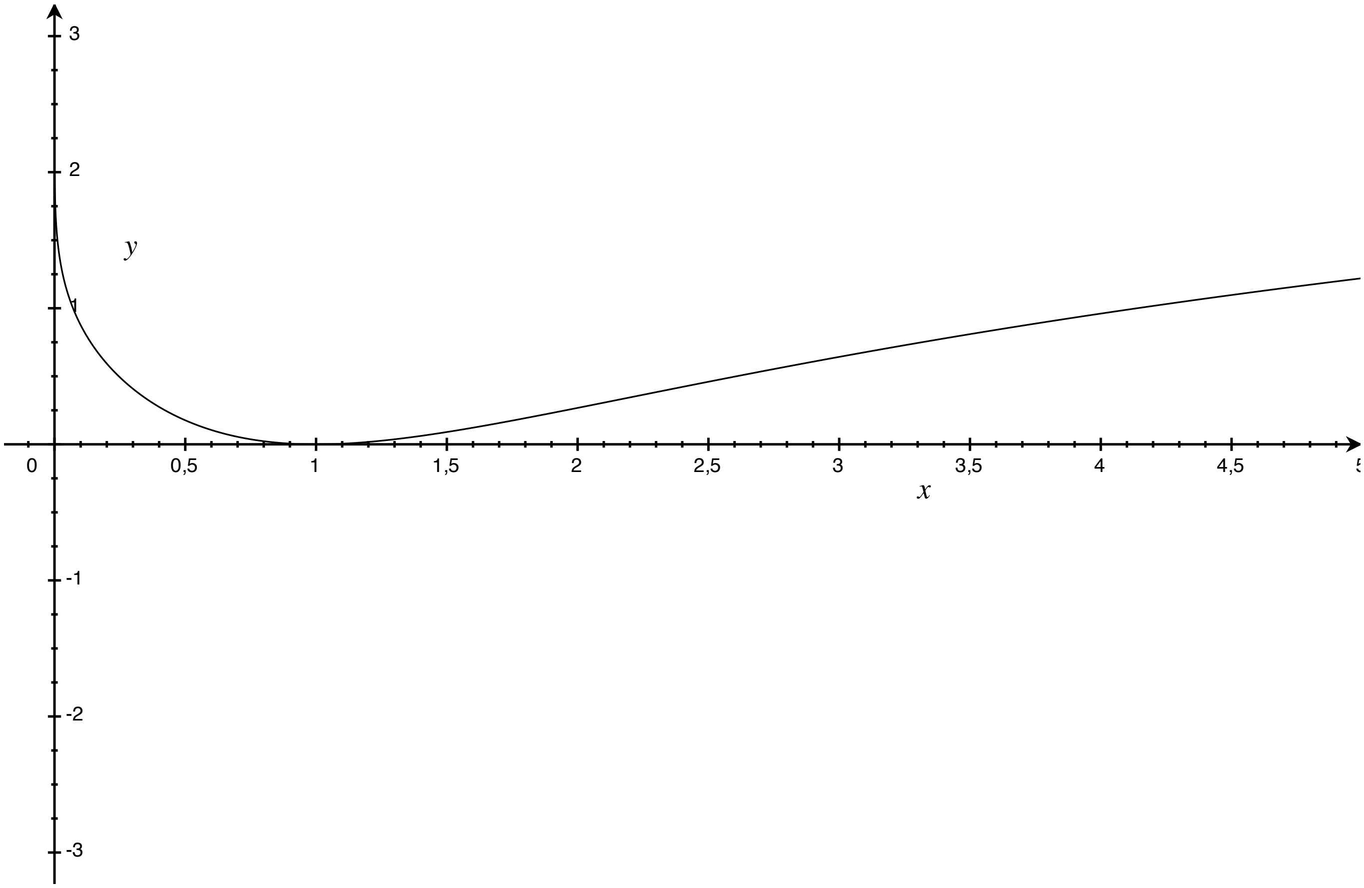
$$f''(x) = \frac{x(x - \log x) - (x-1)\left((x - \log x) + x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x^2(x - \log x)^2} = \frac{x - \log x - (x-1)^2}{x^2(x - \log x)^2}.$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi studieremo solo il segno del numeratore. Lo studio risulta piuttosto complicato, tuttavia possiamo osservare che

$$\lim_{x\to 0^+} x - \log x - (x-1)^2 = 0 - (-\infty) - (0-1)^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x - \log x - (x-1)^2 = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2} - \left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right) = \infty(0 - 0 - 1) = -\infty.$$

Dal teorema sulla permanenza del segno segue che $f''(x)$ è positiva in un intorno destro di 0 e negativa in un intorno di ∞, quindi f ha almeno un cambio di convessità.



3
2
1
-1
-2
-3
y
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
x