Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 14 febbraio 2015

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$

A) non è né iniettiva né surgettiva B) è surgettiva ma non iniettiva
C) è iniettiva ma non surgettiva D) è bigettiva

B

Domanda 2 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{x^5+\sin x}{x^4+(\cos x)^2}}$

A) è limitata inferiormente ma non ha minimo B) ha sia massimo che minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) è limitata superiormente ma non inferiormente

A

Domanda 3

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} =$$

A) $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ B) 1 C) $-\dfrac{e^3}{2}$ D) $\dfrac{1}{e^6}$

D

Domanda 4

$$\lim_{n\to\infty} n! - n^2 e^n =$$

A) $-\infty$ B) e^2 C) 0 D) ∞

D

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n!}$ definita per $n \geq 1$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

B

Domanda 6

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{x(1+x^2)}\, dx$$

A) diverge negativamente B) converge C) non esiste D) diverge positivamente

A

Domanda 7 La funzione $F : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t}\, dt$

A) è limitata inferiormente ma non superiormente B) è limitata superiormente ma non inferiormente
C) non è limitata né inferiormente né superiormente D) è limitata sia superiormente che inferiormente

D

Domanda 8

$$\int_0^\infty \frac{e^{(-x^2)}\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

A) diverge positivamente B) converge C) diverge negativamente D) non esiste

B

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n^2)}$

A) diverge positivamente B) converge assolutamente
C) diverge negativamente D) converge ma non converge assolutamente

B

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{3n+\cos n}$

A) converge ma non converge assolutamente B) converge assolutamente
C) diverge positivamente D) è indeterminata

A

codice 187571

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 14 febbraio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log|x| - \dfrac{x^2-1}{4x}$ determinandone insiemi di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo o minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in tale insieme è continua e derivabile. Valutiamo i limiti. Scrivendo la funzione come

$$f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

si ottiene subito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(\infty) - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{-\infty} = \infty + \infty + 0 = \infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \log(0^+) - \frac{0}{4} + \frac{1}{0^-} = -\infty - 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} -\frac{x}{4} + \frac{1}{4x}(1 + 4x\log|x|) = -\frac{0}{4} + \frac{1}{0^+}(1+0) = \infty$$

avendo sfruttato il limite notevole $\lim_{x\to0^+} x\log x = 0$ facilmente ottenibile con il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to0^+} = \frac{1}{4x} - \frac{x}{4}\left(1 - \frac{4\log|x|}{x}\right) = \frac{1}{\infty} - \infty(1-0) = 0 - \infty = -\infty$$

dove questa volta abbiamo utilizzato il limite notevole $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ anche questo ottenibile con il teorema di de l'Hôpital. La funzione presenta quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e nessun asintoto orizzontale. Potrebbe avere quelli obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log x}{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{4}\right)x = \lim_{x\to\pm\infty} \log|x| + \frac{1}{4x} = \infty + \frac{1}{\pm\infty} = \infty + 0 = \infty$$

quindi la funzione non ha asintoti obliqui. Dai risultati sui limiti abbiamo anche che la funzine non ha né massimo né minimo e $\sup(f) = \infty$ e $\inf(f) = -\infty$. Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi il segno è determinato dal numeratore.

$$-x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-1}}{-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

quindi

$$f'(x) > 0 \iff x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty).$$

La funzione è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$, nell'intervallo $(0, 2-\sqrt{3}]$, strettamente crescente nell'intervallo $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ e strettamente decrescente sulla semiretta $[2+\sqrt{3}, \infty)$. Il punto $x = 2-\sqrt{3}$ è di minimo locale mentre il punto $x = 2+\sqrt{3}$ è di massimo locale. Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{1-2x}{2x^3}.$$

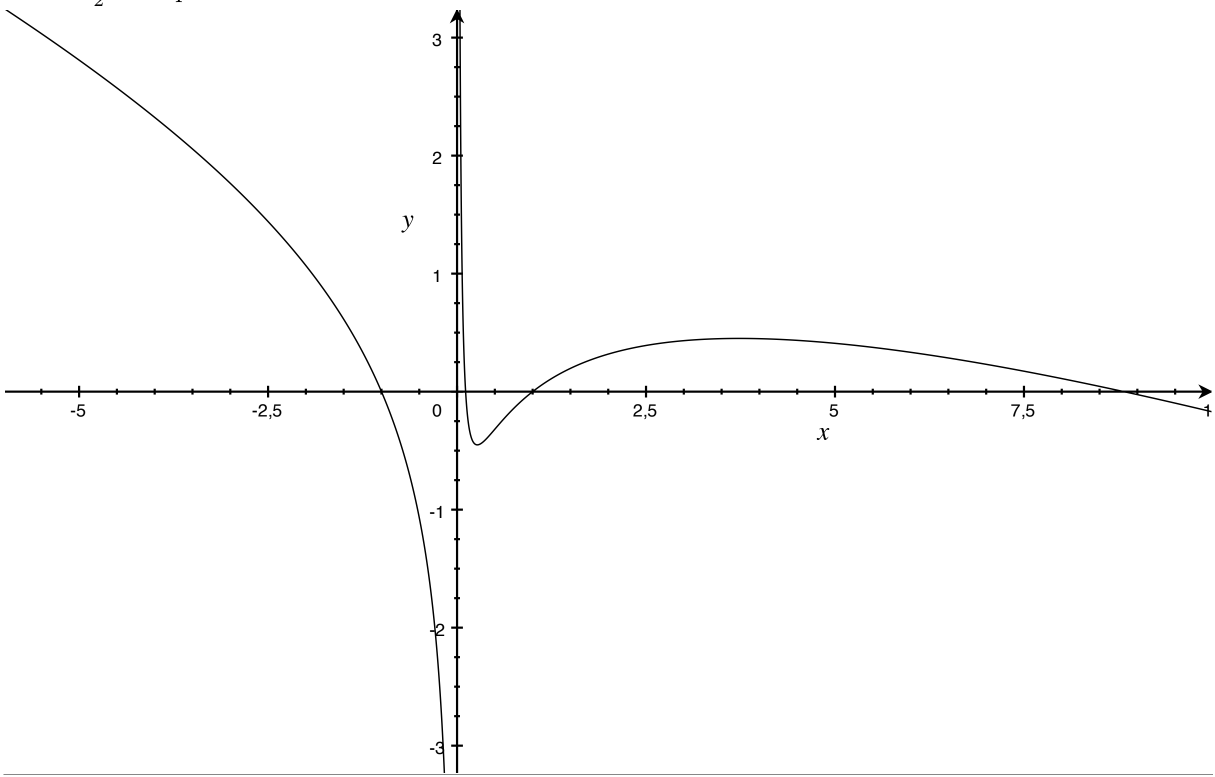
Studiandone il segno si ottiene che

$$1-2x>0 \iff x<\frac{1}{2}, \quad 2x^3>0 \iff x>0$$

quindi

$$f''(x)>0 \iff x\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \qquad f''(x)<0 \iff x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right).$$

La funzione f è concava sulla semiretta $(-\infty,0)$, convessa nell'intervallo $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ e concava sulla semiretta $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. Il punto $x=\frac{1}{2}$ è un punto di flesso.



Esercizio 2 Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ la convergenza e la convergenza assoluta della seguente serie

$$\sum_{n\geq 1}\left((n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}-n\right)(-1)^n.$$

Soluzione

Poniamo

$$a_n=\left((n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}-n\right)$$

e osserviamo che se $\alpha<0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}a_n=(0+1)^{\frac{1}{\alpha}}-\infty=-\infty$$

quindi non esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n$$

pertanto la serie non converge. Consideriamo ora il caso $\alpha>0$. Ricordiamo lo sviluppo di Taylor, per $t\to 0$

$$(1+t)^\beta=1+\beta t+o(t)$$

e applichiamolo con $\beta=\frac{1}{\alpha}$ e $t=n^{-\alpha}$.

$$a_n=(n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}-n=\left(n^\alpha(1+n^{-\alpha})\right)^{\frac{1}{\alpha}}-n=n(1+n^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-n=n\left(1+\frac{1}{\alpha}n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha})-1\right)=\frac{1}{\alpha}n^{1-\alpha}+o(n^{1-\alpha}).$$

Da questo segue subito che $a_n > 0$ definitivamente e che

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Questo implica che per $\alpha \in (0,1]$ non esiste $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n$ quindi la serie non converge.

Studiamo ora la convergenza assoluta.

$$\sum_{n\geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n\geq 1} a_n$$

e per il criterio del confronto asintotico la serie converge assolutamente se e solo se converge le serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

cioè quando

$$\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2.$$

Vediamo ora la convergenza semplice. La serie è a segni alterni, poiché $a_n > 0$. Inoltre, dato che $a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \alpha - 1 > 0 \iff \alpha > 1.$$

Verifichiamo che per $\alpha > 1$ la successione $\{a_n\}$ è debolmente decrescente. Per fare questo studiamo la monotonia della funzione $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} - x.$$

Derivando si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha}(x^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}-1}\alpha x^{\alpha-1} - 1 = (x^\alpha + 1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x^{\alpha-1} - 1.$$

Quindi

$$f'(x) < 0 \iff (x^\alpha + 1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x^{\alpha-1} < 1 \iff x^{\alpha-1} < (x^\alpha + 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Per verificare l'ultima disuguaglianza basta osservare che la funzione

$$g(t) = t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad t > 0$$

è strettamente crescente dato che per $\alpha > 1$ l'esponente è positivo, pertanto

$$(x^\alpha + 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} > (x^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = x^{\alpha-1}.$$

Abbiamo quindi provato che f è strettamente decrescente, quindi anche $a_n = f(n)$ lo è. Applicando il criterio di Leibniz otteniamo che la serie converge per $\alpha > 1$.

Riassumendo, la serie non converge per $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$, converge per $\alpha \in (1, \infty)$ e converge assolutamente per $\alpha \in (2, \infty)$.