Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2015

Domanda 1 Si consideri la successione $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+7}{n}}$ definita per $n \geq 1$. Il minimo di $\{a_n\}$ è

A) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ B) non esiste C) $\sqrt{2\sqrt{7}}$ D) $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$

A

Domanda 2 La successione $a_n = \log(3n^2+1) + (-1)^n \log(n^2+2)$

A) è limitata B) è limitata superiormente ma non inferiormente

C) è limitata inferiormente ma non superiormente D) non è limitata né superiormente né inferiormente

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2}$

A) ha massimo B) non ha né minimo né massimo

C) è limitata inferiormente ma non superiormente D) ha minimo

A

Domanda 4 La funzione $f(x) = \sqrt{x^6 - 2x^5 + x^4}$

A) è derivabile in tutto il suo dominio di definizione B) ha almeno due punti angolosi

C) ha almeno un punto di discontinuità D) ha un solo punto angoloso

D

Domanda 5 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{\sin(x^2)}{x^3}$

A) non è limitata inferiormente B) è limitata inferiormente ma non ha minimo

C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x + 1 - \cos x}{x^2 + x^3}\, dx$

A) diverge positivamente B) diverge negativamente

C) converge D) non esiste

A

Domanda 7 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$

A) converge B) diverge positivamente

C) diverge negativamente D) non esiste

A

Domanda 8 $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{|x+1|}\, dx =$

A) 0 B) $e^3 + e - 2$

C) $e^3 - e$ D) $e^3 - \dfrac{1}{e}$

B

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{e^2} + \frac{2}{\sqrt[n]{e}} - 3 \right)$

A) converge assolutamente B) diverge positivamente

C) diverge negativamente D) converge ma non converge assolutamente

A

Domanda 10 La serie $\sum_n \left((-1)^n \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)\right)$

A) converge assolutamente B) converge ma non converge assolutamente

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

A

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + ex$ determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi inferiore e superiore o minimo e massimo, punti di massimo e minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e in tale insieme è continua e derivabile perché somma e composizione di funzioni derivabili. Valutiamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{\frac{1}{-\infty}} + e(-\infty) = e^0 - \infty = 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} + e \cdot 0 = e^{-\infty} + 0 = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} + e \cdot 0 = e^{\infty} + 0 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\frac{1}{\infty}} + e \cdot \infty = e^0 + \infty = 1 + \infty = \infty.$$

Da questi risultati otteniamo subito che

$$\inf(f) = -\infty, \qquad \sup(f) = \infty$$

quindi f non ha né minimo né massimo. La funzione ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 0$ mentre non ha asintoti orizzontali. Potrebbe avere quelli obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e = \frac{e^{\frac{1}{\pm\infty}}}{\pm\infty} + e = \frac{e^0}{\pm\infty} + e = \frac{1}{\pm\infty} = 0 + e = e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ex = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1$$

quindi siamo in presenza di un asintoto obliquo di equazione $y = ex + 1$ sia a $-\infty$ che a ∞. Calcoliamo ora la derivata:

$$f'(x) = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}} + e.$$

Lo studio del segno di f' non è immediato, conviene prima calcolare la derivata seconda.

$$f''(x) = 2x^{-3}e^{\frac{1}{x}} + x^{-4}e^{\frac{1}{x}} = x^{-4}e^{\frac{1}{x}}(2x + 1).$$

Lo studio del segno indica che

$$f''(x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2}, \qquad f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

quindi la funzione è concava sulla semiretta $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, convessa nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ e convessa sulla semiretta $(0, \infty)$. Il punto di ascissa $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso. Dato che la derivata seconda di f è la derivata di f', si ottiene anche che f' è strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, strettamente crescente sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, 0)$ e strettamente crescente sulla semiretta $(0, \infty)$. Il punto $x = -\frac{1}{2}$ è quindi di minimo per f' sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e $f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{e^2} + e$ è il minimo su tale semiretta. Ne segue che

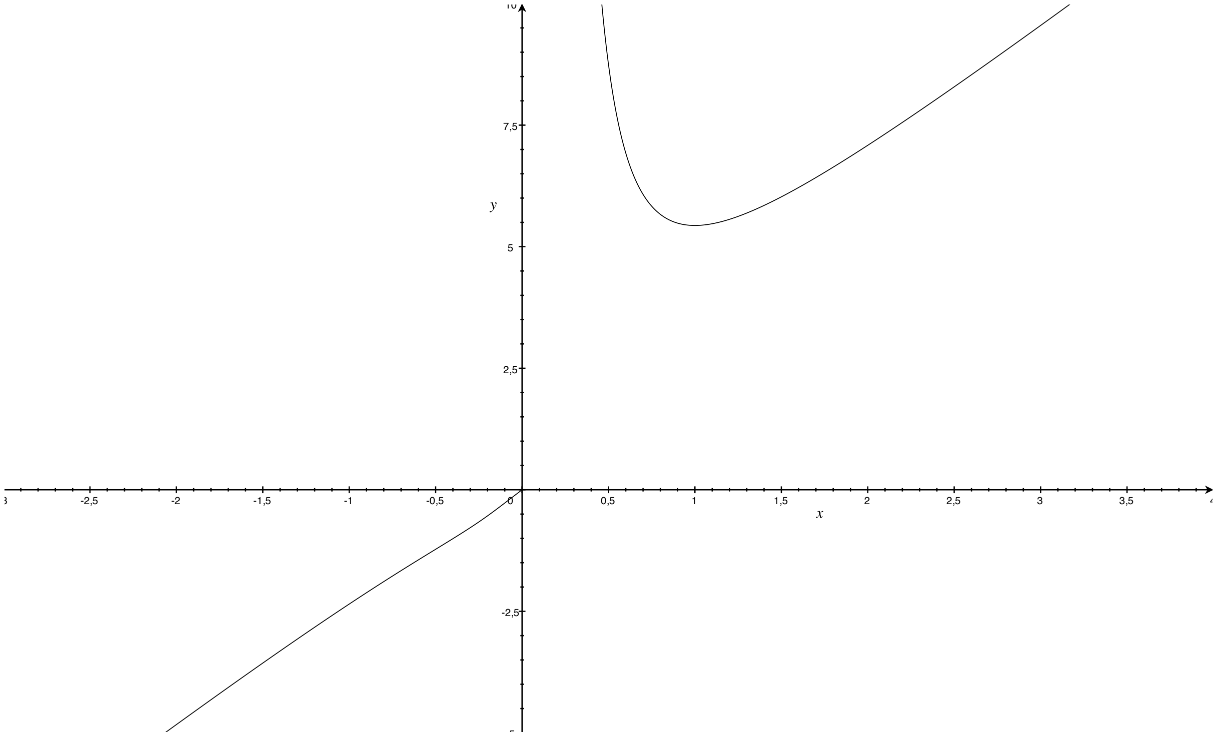
$$f'(x) \geq -\frac{4}{e^2} + e > 0 \qquad \forall x \in (-\infty, 0)$$

quindi f è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{0^+} + e = -\frac{e^{\infty}}{0^+} + e = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} + e = -\frac{e^{0}}{\infty} + e = e.$$

Dal fatto che f' è strettamente crescente e dal teorema degli zeri segue subito che f' si annulla in un solo punto sulla semiretta $(0, \infty)$. Da una verifica diretta si ottiene che $f'(1) = 0$, che $f'(x) < 0$ in $(0, 1)$ e $f'(x) > 0$ in $(1, \infty)$. Quindi $x = 1$ è punto di minimo locale per f.



Esercizio 2 Studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + x}{x^{(\alpha^2)} + x^{2\alpha}}\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è sempre positiva in tutto l'intervallo di integrazione, eccetto per $x = 0$ dove non è definita. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Valutiamo ora quale dei due addendi al denominatore costituisce la parte principale di infinitesimo. Risulta che

$$\alpha^2 < 2\alpha \iff \alpha \in (0, 2), \qquad \alpha^2 > 2\alpha \iff \alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty).$$

Esaminiamo prima il caso $0 < \alpha < 2$. Risulta che

$$\frac{x^2 + x}{x^{(\alpha^2)} + x^{2\alpha}} = \frac{x(x+1)}{x^{(\alpha^2)}(1 + x^{2\alpha - \alpha^2})} \sim \frac{x}{x^{(\alpha^2)}} = \frac{1}{x^{\alpha^2 - 1}}.$$

L'integrale sull'intervallo $(0, 1)$ dell'ultima funzione converge se e solo se $\alpha^2 - 1 < 1$ quindi se e solo se $\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Combinando quanto ottenuto con l'intervallo di α preso in considerazione otteniamo che l'integrale proposto converge se $\alpha \in (0, \sqrt{2})$ e diverge positivamente se $\alpha \in [\sqrt{2}, 2)$.

Consideriamo ora $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. In questo caso otteniamo

$$\frac{x^2 + x}{x^{(\alpha^2)} + x^{2\alpha}} = \frac{x(x+1)}{x^{2\alpha}(x^{\alpha^2 - 2\alpha} + 1)} \sim \frac{x}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha - 1}}$$

e l'integrale dell'ultima funzione converge se e solo se $2\alpha - 1 < 1$ quindi $\alpha < 1$. Intersecando con l'insieme degli α che stiamo considerando otteniamo la convergenza per $\alpha \in (-\infty, 0)$ e la divergenza positiva per $\alpha \in (2, \infty)$. Esaminiamo infine i casi limite. Se $\alpha = 0$ si ha che l'integranda diventa $\frac{x^2+x}{2}$ che ha integrale convergente. Se $\alpha = 2$ invece otteniamo $\frac{x^2+x}{2x^4} \sim \frac{1}{x^3}$ che ha integrale divergente. Riassumendo l'integrale proposto converge se $\alpha \in (-\infty, \sqrt{2})$ mentre diverge positivamente se $\alpha \in [\sqrt{2}, \infty)$.