Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 8 gennaio 2015

Domanda 1 Sia $A = \left\{ \frac{n-1}{n}(-1)^{3n} : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}$. Risulta che

A) $\max(A) = 1$ B) $\max(A) = \frac{1}{2}$ C) $\sup(A) = 1$ D) $\sup(A) = +\infty$

C

Domanda 2 Sia $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} > 0 \right\}$. L'insieme A

A) è limitato B) non è limitato né inferiormente né superiormente
C) è limitato superiormente ma non inferiormente D) è limitato inferiormente ma non superiormente

B

Domanda 3

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\log(n^2+1) - 2\log n \right) \sin n =$$

A) 0 B) non esiste C) 1 D) $+\infty$

A

Domanda 4 La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}(-1)^n$

A) converge ma non converge assolutamente B) converge assolutamente
C) diverge postivamente D) diverge negativamente

B

Domanda 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(\sin x - x)} =$$

A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) $\frac{1}{6}$

C

Domanda 6 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x} - \arctan x$

A) è inferiormente limitata ma non ha minimo B) non è limitata né superiormente né inferiormente
C) ha minimo D) è inferiormente limitata ma non è superiormente limitata

A

Domanda 7 La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{(\arctan n)^{(n^2)}}{e^n \log n}$

A) diverge positivamente B) converge semplicemente ma non assolutamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

A

Domanda 8 La funzione $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t+2}\,dt & \text{se } x > 0 \\ e^x - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

A) è continua ma derivabile solo a destra in $x = 0$ B) è derivabile in $x = 0$
C) è continua ma derivabile solo a sinistra in $x = 0$ D) non è continua in $x = 0$

D

Domanda 9 L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^2 - x)}{x\log(1+x)}\,dx$

A) converge B) diverge negativamente C) diverge positivamente D) non esiste

B

Domanda 10 L'integrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos(e^{(x^2)})}{x + \sin x}\,dx$

A) diverge positivamente B) converge C) non esiste D) diverge negativamente

A

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 8 gennaio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^{(n^2)}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{3\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Osserviamo che $1-\cos\frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \geq 1$ e che $(-1)^{n^2}$ vale 1 se n è pari e -1 se n è dispari. La serie è quindi a segni alternati. Inoltre, per $x \to 0$ si ha che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

quindi, per $n \to \infty$

$$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Studiamo prima la convergenza assoluta. Il termine generale della serie diventa

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{3\alpha} \sim \frac{1}{n^{6\alpha}}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico la serie converge assolutamente se $\alpha > \frac{1}{6}$. Se $\alpha \leq \frac{1}{6}$ la serie non converge assolutamente. Per la convergenza semplice osserviamo che la funzione

$$f(x) = 1-\cos\frac{1}{x}$$

è decrescente per $x \geq 1$, quindi la successione $\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{3\alpha}$ è decrescente per ogni $\alpha > 0$. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{3\alpha} = 0$$

sempre nel caso $\alpha > 0$. Utilizzando il criterio di Leibniz possiamo affermare che la serie converge per ogni $\alpha > 0$. Per $\alpha \leq 0$ si ottiene che non esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{(n^2)}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{3\alpha}$$

quindi viene a mancare la condizione necessaria per la convergenza.

Esercizio 2 Studiare la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-1}\left(1-\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$ determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore, massimo e minimo e punti di massimo e minimo locali. Tracciare anche un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $\frac{x+1}{x-1} > 0$ che si traduce in $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. In tale intervallo la funzione è anche continua e derivabile, in quanto somma prodotto e composizione di funzioni derivabili. Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$$

dal teorema sul limite della composizione si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1(1-0) = 1.$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale sia a $-\infty$ che a $+\infty$ di equazione $y = 1$. Ricordando che, dal teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{t\to 0^+} t\log t = 0$$

eseguendo la sostituzione $t = \frac{x+1}{x-1}$ e osservando che

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x-1} = 0^+$$

si ha che

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0.$$

Infine, dato che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty(1 - \lim_{t\to\infty} \log t) = -\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale destro di equazione $x = 1$. Possiamo anche subito concludere che la funzione non ha minimo e che

$$\inf(f) = -\infty.$$

Calcoliamo ora la derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\left(1-\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) + \frac{x+1}{x-1}\left(-\frac{x-1}{x+1}\,\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\right) \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2}\left(1-\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \end{aligned}$$

Studiando il segno si ottiene che $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$$

quindi, per la crescenza della funzione logaritmo, se e solo se

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \iff \frac{x+1-(x-1)}{x-1} > 0 \iff \frac{2}{x-1} > 0 \iff x > 1.$$

Abbiamo quindi ottenuto che la funzione è decrescente sulla semiretta $(-\infty, -1)$ e crescente su quella $(1, \infty)$. Come conseguenza si ottiene anche che $f(x) < 1$ per ogni x ed essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ si ha anche

$$\sup(f) = 1.$$

L'estremo superiore non è un massimo perché la derivata di f non si annulla mai e tutti i punti del dominio di f sono punti interni.