Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 settembre 2013

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2+1) < 1 - x^2\}$. L'insieme A
A) è limitato B) non è limitato né inferiormente né superiormente
C) è limitato inferiormente ma non superiormente D) è limitato superiormente ma non inferiormente

A

Domanda 2 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{n}{n+1} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Risulta
A) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ B) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$
C) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -1$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

C

Domanda 3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{2n} =$
A) 0 B) $+\infty$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$

C

Domanda 4 La serie $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{2(k-1)\,3^{k(2k+1)}}{k(k+1)e^k}$
A) converge assolutamente B) diverge positivamente
C) diverge negativamente D) converge ma non converge assolutamente

B

Domanda 5 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x^3\log(1-x^2)} =$
A) 1 B) 0
C) $-\infty$ D) non esiste

B

Domanda 6 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x^2+1)}{x}$
A) ha minimo B) ha massimo
C) è superiormente limitata ma non ha massimo D) è inferiormente limitata ma non ha minimo

A

Domanda 7 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$
A) diverge positivamente B) converge
C) diverge negativamente D) è indeterminata

B

Domanda 8 Sia $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{t^2}\,dt$. Allora $F'(2) =$
A) 0 B) $\dfrac{\log 17}{4}$
C) $\dfrac{\log 5}{4}$ D) $\dfrac{\log 17}{16}$

B

Domanda 9 L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)\log(1+t^2)}\,dt$
A) diverge positivamente B) converge
C) non esiste D) diverge negativamente

A

Domanda 10 L'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1+e^x)\,dx$
A) converge B) diverge positivamente
C) diverge negativamente D) non esiste

A

codice 397015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 settembre 2013

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(\sin x) > 0\}$. Allora
A) $\sup(A) = 1$ B) $\inf(A) = 0$
C) $\inf(A) = -\infty$ D) $\sup(A) = \cos(\sin 1)$

C

Domanda 2 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 + 1) < 1 - x^2\}$. L'insieme A
A) è limitato B) non è limitato né inferiormente né superiormente
C) è limitato inferiormente ma non superiormente D) è limitato superiormente ma non inferiormente

A

Domanda 3 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{n}{n+1} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Risulta
A) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ B) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$
C) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -1$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

C

Domanda 4 L'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1 + e^x)\, dx$
A) converge B) diverge positivamente
C) diverge negativamente D) non esiste

A

Domanda 5 La successione $a_n = (5 + \sin n)^n$
A) ha massimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha minimo D) è limitata inferiormente ma non ha minimo

C

Domanda 6 L'integrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t}{(1 + t^2)\log(1 + t^2)}\, dt$
A) diverge positivamente B) converge
C) non esiste D) diverge negativamente

A

Domanda 7 Sia $F(x) = \displaystyle\int_{2}^{x^2} \frac{\log(1 + t^2)}{t^2}\, dt$. Allora $F'(2) =$
A) 0 B) $\dfrac{\log 17}{4}$
C) $\dfrac{\log 5}{4}$ D) $\dfrac{\log 17}{16}$

B

Domanda 8 $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^3 \log(1 - x^2)} =$
A) 1 B) 0
C) $-\infty$ D) non esiste

B

Domanda 9 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{2n} =$
A) 0 B) $+\infty$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$

C

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x^2 + 1)}{x}$
A) ha minimo B) ha massimo
C) è superiormente limitata ma non ha massimo D) è inferiormente limitata ma non ha minimo

A

codice III anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 settembre 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, gli eventuali asintoti, compresi quelli obliqui e gli intervalli di monotonia. Trovare inoltre i punti di massimo o minimo locali, gli estremi superiore e inferiore ed eventualmente il massimo e il minimo assoluti. Determinare infine gli intervalli di convessità e di concavità.

Soluzione

La funzione è definita quando $e^{2x} - 1 \geq 0$ cioè se $x \geq 0$. In tutto il suo insieme di definizione la f è continua perché composizione di funzioni continue. Da questo segue subito che la funzione non ha asintoti verticali. Vediamo il limite all'infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{e^{+\infty} - 1} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

La funzione non presenta quindi asintoti orizzontali. Potrebbe averne uno obliquo. Utilizzando la disuguaglianza $e^{2x} - 1 > x^4$ valida per x abbastanza grande, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x} = +\infty$$

quindi non ci sono neanche asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata per studiare la monotonia.

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}, \qquad x > 0.$$

Per $x = 0$ il denominatore si annulla e risulta

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Dato che la f è continua in $x = 0$, otteniamo che la funzione non è derivabile in $x = 0$ ed ha tangente verticale ($x = 0$ è un punto di semi-cuspide). L'insieme di derivabilità è quindi $(0, +\infty)$. Risulta inoltre

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x > 0$$

quindi la funzione è strettamente crescente in tutto il dominio. Il minimo è 0, non esiste il massimo e l'estremo superiore è $+\infty$. Non ci sono punti di massimo locale. L'unico punto di minimo locale (ed assoluto) è $x = 0$. Per vedere la convessità calcoliamo la derivata seconda. Per ogni $x > 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}\sqrt{e^{2x} - 1} - e^{2x}\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}}}{e^{2x} - 1} = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - e^{4x}}{(e^{2x} - 1)^{3/2}} = \frac{e^{2x}(e^{2x} - 2)}{(e^{2x} - 1)^{3/2}}.$$

I termini e^{2x} e il denominatore sono sempre positivi, quindi

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow e^{2x} - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{\log 2}{2}.$$

La funzione è quindi concava nell'intervallo $\left[0, \frac{\log 2}{2}\right]$, convessa sulla semiretta $\left[\frac{\log 2}{2}, +\infty\right)$ e il punto $x = \frac{\log 2}{2}$ è un punto di flesso.

Esercizio 2 Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale

$$\int_{-2}^{2} \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che per $x \in (-2, 2)$ si ha $4 - x^2 > 0$ quindi la funzione integranda è definita e continua in tutti i punti interni dell'intervallo di integrazione. Dovremo solo controllare il comportamento agli estremi. Risulta, per ogni $x \in (-2, 2)$

$$\frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha} = \frac{x(2 - x)}{(2 - x)^\alpha (2 + x)^\alpha} = \frac{x}{(2 - x)^{\alpha - 1}(2 + x)^\alpha}.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi avremo che la funzione integranda è positiva nell'intervallo $(0, 2)$ e negativa in $(-2, 0)$. Per $x \to 2^-$ si ha che

$$\frac{x}{(2 - x)^{\alpha - 1}(2 + x)^\alpha} \sim \frac{1}{(2 - x)^{\alpha - 1}}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale

$$\int_0^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx$$

converge se e solo se $\alpha - 1 < 1$ cioè $\alpha < 2$. Analogamente, per $x \to -2^+$ si ha che

$$\frac{x}{(2 - x)^{\alpha - 1}(2 + x)^\alpha} \sim \frac{1}{(2 + x)^\alpha}$$

e in questo caso l'integrale

$$\int_{-2}^0 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$. Mettendo insieme i risultati si ottiene che se $\alpha < 1$ entrambi gli integrali convergono quindi

$$\int_{-2}^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx$$

converge. Se $1 \leq \alpha < 2$ abbiamo che

$$\int_{-2}^0 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx = -\infty, \qquad \int_0^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx \text{ converge}$$

quindi

$$\int_{-2}^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx = -\infty.$$

Infine, se $\alpha \geq 2$ si ha che

$$\int_{-2}^0 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx = -\infty, \qquad \int_0^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx = +\infty$$

quindi

$$\int_{-2}^2 \frac{2x - x^2}{(4 - x^2)^\alpha}\, dx$$

non esiste.

Esercizio 3 Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

Soluzione

Ricordiamo che, per $t \to 0$ si ha

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4).$$

Applicando tale formula con $t = \frac{1}{n}$ si ha che, per $n \to \infty$

$$1 - n \sin \frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Ne segue anche che

$$1 - n \sin \frac{1}{n} > 0$$

per n abbastanza grande (risultato che si poteva ottenere anche direttamente dalla disuguaglianza $\sin t < t$ per $t > 0$). Essendo $1 - \cos \frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo che la serie è a termini positivi. Dallo sviluppo di Taylor del coseno otteniamo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \qquad t \to 0.$$

Quindi

$$1 - \cos \frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^2} \qquad n \to \infty.$$

Mettendo insieme i risultati abbiamo che

$$\left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{2\alpha+2}}.$$

Applicando il criterio del confronto asintotico abbiamo che la serie converge se e solo se

$$2\alpha + 2 > 1 \Longleftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 4 Si consideri la successione

$$a_n = \left(\frac{2 + (-1)^n}{5}\right)^n, \quad n \geq 1$$

e se ne calcolino il limite, l'estremo inferiore e l'estremo superiore specificando se questi sono anche il massimo e il minimo.

Soluzione

Osserviamo che

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2 + (-1)^n}{5}\right)^n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

dal teorema dei Carabinieri segue che anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dal fatto che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$ segue che

$$\inf_{n\geq 1} a_n \geq 0.$$

Dal fatto che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ segue quindi che

$$\inf_{n\geq 1} a_n = 0.$$

Osserviamo anche che, essendo sempre $a_n > 0$, l'estremo inferiore non è un minimo. Consideriamo ora le sottosuccessioni di indici pari e dispari. Siano quindi

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2n}, \ n \geq 1, \qquad c_n = a_{2n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}, \ n \geq 0.$$

Queste due successioni sono entrambe decrescenti, quindi il massimo e da ricercarsi confrontando il primo elemento di entrambe.

$$b_1 = a_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \qquad c_0 = a_1 = \frac{1}{5}.$$

Dato che $\frac{9}{25} > \frac{1}{5}$ si ottiene che

$$\sup_{n\geq 1} a_n = \max_{n\geq 1} a_n = \frac{9}{25}.$$