Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 18 luglio 2013

Domanda 1 La derivata della funzione $f(x) = x^3(e^{x^3} - 1)$ è

A) $9x^4e^{x^3}$ B) $3e^{x^3}(x^2 + x^5) - 3x^2$ C) $3x^2e^{x^3} - 3x^2 + x^6e^{x^3-1}$ D) $e^{x^3}(3x^2 + x^3) - 3x^2$

B

Domanda 2 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log x}{\arctan x}$

A) ha un asintoto obliquo B) ha minimo assoluto
C) ha un asintoto orizzontale e uno verticale D) non è limitata inferiormente

D

Domanda 3

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\sin(x^2)\right) =$$

A) 0 B) $-\infty$
C) non esiste D) $+\infty$

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{1}{(-2)^n}$

A) ha massimo ma non ha minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 5 Sia $A = \left\{\left(\frac{1+\sin n}{4}\right) : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\}$. Allora

A) $\sup(A) = +\infty$ B) $\inf(A) = -\infty$
C) $\inf(A) \geq 0$ D) $\inf(A) = -1$

C

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)}\,dx$

A) diverge positivamente B) converge
C) diverge negativamente D) non esiste

B

Domanda 7 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x + (\sin x)^2}\,dx$

A) diverge negativamente B) diverge positivamente
C) non esiste D) converge

B

Domanda 8 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 1)}\,dx =$

A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ B) $\dfrac{1}{3}$
C) $\log 2 - \dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{\log 2}{2} - \sqrt{2}$

A

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{4^{(4n)}}{3\sqrt{n}+1}$

A) diverge positivamente B) converge ma non converge assolutamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

A

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(\log 2)^n}{n^2}$

A) diverge positivamente B) converge ma non converge assolutamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 18 luglio 2013

Domanda 1 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1)}\,dx =$

A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ B) $\dfrac{1}{3}$
C) $\log 2 - \dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{\log 2}{2} - \sqrt{2}$

A

Domanda 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}\sin x}{\sqrt{x}\,\log(1+x)}\,dx$

A) diverge positivamente B) converge
C) diverge negativamente D) non esiste

B

Domanda 3 Sia $A = \left\{\left(\frac{1+\sin n}{4}\right) : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\}$. Allora
A) $\sup(A) = +\infty$ B) $\inf(A) = -\infty$
C) $\inf(A) \geq 0$ D) $\inf(A) = -1$

C

Domanda 4 L'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} > 4\}$
A) è limitato inferiormente ma non superiormente B) è limitato
C) è limitato superiormente ma non inferiormente D) non è limitato né superiormente né inferiormente

A

Domanda 5

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\sin(x^2)\right) =$$

A) 0 B) $-\infty$
C) non esiste D) $+\infty$

B

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x + (\sin x)^2}\,dx$

A) diverge negativamente B) diverge positivamente
C) non esiste D) converge

B

Domanda 7 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log x}{\arctan x}$
A) ha un asintoto obliquo B) ha minimo assoluto
C) ha un asintoto orizzontale e uno verticale D) non è limitata inferiormente

D

Domanda 8 La derivata della funzione $f(x) = x^3(e^{x^3} - 1)$ è
A) $9x^4e^{x^3}$ B) $3e^{x^3}(x^2 + x^5) - 3x^2$ C) $3x^2e^{x^3} - 3x^2 + x^6e^{x^3-1}$ D) $e^{x^3}(3x^2 + x^3) - 3x^2$

B

Domanda 9 La successione $a_n = \dfrac{1}{(-2)^n}$
A) ha massimo ma non ha minimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 10 $\lim_{x\to 0} \sin\left(\log(x^2)\right) =$
A) 0 B) non esiste
C) $+\infty$ D) $-\infty$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 18 luglio 2013

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)$$

determinandone insieme di definizione, intervalli di monotonia, punti di massimo o di minimo locali, massimo e minimo assoluti oppure estremi superiore e inferiore ed eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dato che risulta sempre $1 + x^2 \neq 0$ e $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$. Inoltre è pari essendo

$$f(-x) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{1+(-x)^2}\right)\right) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = f(x).$$

Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{+\infty}\right)\right) = \arctan\left(\log(0^+)\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

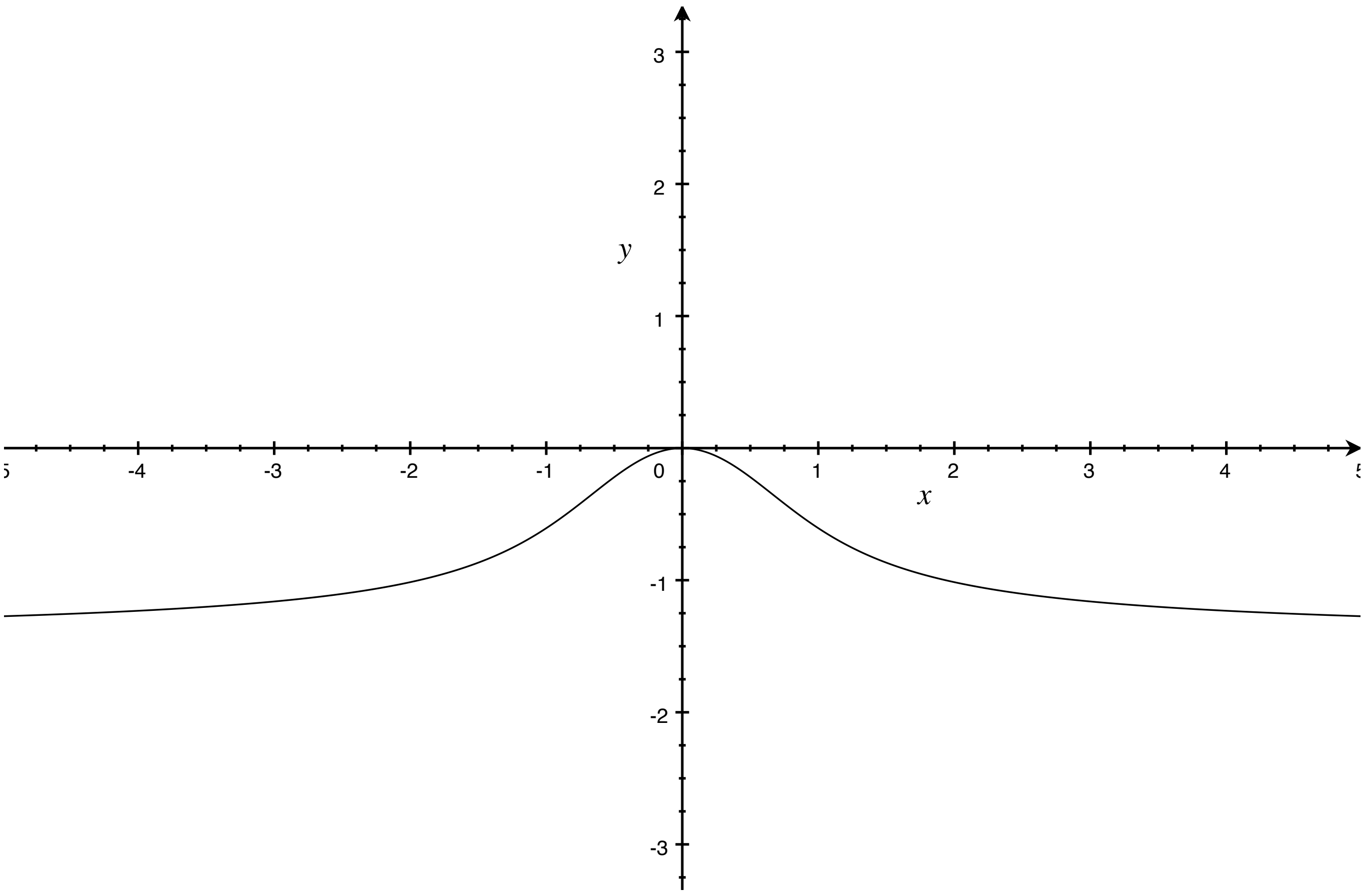
Per simmetria si ha che anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La funzione ha quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y = -\dfrac{\pi}{2}$.
Osserviamo ora che la funzione $x \to \frac{1}{1+x^2}$ è decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$ mentre le funzioni logaritmo e arcotangente sono crescenti. Ne segue che la f è decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$. Per simmetria f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0]$ quindi il punto $x = 0$ è di massimo assoluto (quindi anche locale). Il massimo di f è quindi

$$f(0) = \arctan(\log 1) = 0.$$

L'estremo inferiore è $-\frac{\pi}{2}$. La funzione non ha minimo perché dovrebbe coincidere con l'estremo inferiore e l'arcotangente non assume mai il valore $-\frac{\pi}{2}$. Non ci sono né asintoti verticali né asintoti obliqui.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \, dx.$$

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $x = e^t$ otteniamo $\frac{dx}{dt} = e^t$ e gli estremi dell'intervallo diventano $t = 0$ in corrispondenza di $x = 1$ e $t = \pi$ in corrispondenza di $x = e^\pi$. Risulta quindi

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \, dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{e^t} t e^t \, dt = \int_0^\pi t \sin t \, dt.$$

Integriamo ora per parti derivando t e integrando $\sin t$:

$$\int_0^\pi t \sin t \, dt = [-\cos t \cdot t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos t \, dt = -\cos \pi \cdot \pi + 0 + [\sin t]_0^\pi = \pi.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n \frac{\sqrt{n^3 + n^2 - 1} - \sqrt{n^3 + n^2 - n}}{\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 1}}.$$

Razionalizziamo il termine generale a_n della serie moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\frac{\sqrt{n^3+n^2-1}+\sqrt{n^3+n^2-n}}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}}$$

ottenendo

$$a_n = \frac{\left(n^3+n^2-1-(n^3+n^2-n)\right)\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^3+n^2-1}+\sqrt{n^3+n^2-n}\right)\left(n^2-n-(n^2+1)\right)} = \left(\frac{-1+n}{-n-1}\right)\frac{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+n^2-1}+\sqrt{n^3+n^2-n}}.$$

Osserviamo che la serie è a termini negativi quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Dall'equazione precedente risulta che

$$a_n \sim -\frac{1}{n^{1/2}}$$

pertanto la serie diverge negativamente.

Esercizio 4 Trovare il limite, il massimo e il minimo della successione

$$a_n = \frac{n(-1)^n+1}{2n(-1)^n+1}.$$

Soluzione
Per quanto riguarda il limite, moltiplicando numeratore e denominatore per $(-1)^n$ otteniamo che

$$a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Per trovare massimo e minimo, distinguiamo il comportamento della successione per gli indici pari e per quelli dispari. Le due sottosuccessioni che otteniamo sono

$$b_n = a_{2n} = \frac{2n+(-1)^{2n}}{2(2n)+(-1)^{2n}} = \frac{2n+1}{4n+1}$$

$$c_n = a_{2n+1} = \frac{2n+1+(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+(-1)^{2n+1}} = \frac{2n}{4n+1}.$$

Studiamo ora le funzioni

$$f(x) = \frac{2x+1}{4x+1}, \qquad g(x) = \frac{2x}{4x+1}.$$

Il grafici di f e di g sono iperboli con asintoti $x = -\frac{1}{4}$ e $y = \frac{1}{2}$. Calcolandone il valore per $x = 0$ si ottiene subito che sulla semiretta $[0, +\infty)$ f è una funzione decrescente mentre g è crescente. Ne segue che b_n è decrescente e c_n è crescente. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}$$

si ottiene che

$$c_0 \le c_n < \frac{1}{2} < b_m \le b_0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che il minimo della successione è $c_0 = 0$ mentre il massimo è $b_0 = 1$.