Analisi Matematica I

Pisa, 27 giugno 2013

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x^4 - x^3 - 2x}{e^{2x} + 3 + |x| + x^2}$

A) è limitata superiormente ma non inferiormente B) è limitata
C) non è limitata né superiormente né inferiormente D) è limitata inferiormente ma non superiormente

D

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \log x$ è

A) $\dfrac{(2x + \sin x + x\cos x + 1)x^2 \log x + 2x^2 + 2x\sin x + 2}{2x^3}$ B) $\dfrac{(x^2\cos x - x\sin x - 2)\log x + x^2 + x\sin x + 1}{x^3}$
C) $\dfrac{x^2 + \cos x}{2x^3}$ D) $\dfrac{x^3 + x\cos x - 2x^2 - 2x\sin x - 2}{x^4}$

B

Domanda 3 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+3)\log(1+\frac{1}{2x})}{x} =$

A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) $\dfrac{3}{2}$

B

Domanda 4 Il limite della successione $a_n = n(1 + (-1)^n) + n^2$

A) non esiste B) vale $+\infty$ C) vale 0 D) vale $-\infty$

B

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2 + 1}$

A) ha massimo ma non ha minimo B) ha sia massimo che minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) è limitata ma non ha né massimo né minimo

B

Domanda 6 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\sin(t^2))\, dt =$

A) 0 B) $\dfrac{1}{3}$
C) $+\infty$ D) non esiste

B

Domanda 7 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^3 \sqrt{1 + t^6}\, dt$

A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata superiormente ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 8 L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x^3}\, dx$

A) converge B) diverge positivamente
C) diverge negativamente D) non esiste

B

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\left(\arctan \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

A) converge assolutamente B) diverge positivamente
C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge negativamente

B

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{3 + n^2 \log n}{n^4}$

A) diverge positivamente B) converge assolutamente
C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge negativamente

B

codice 616084

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 27 giugno 2013

Domanda 1 La successione $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2+1}$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) è limitata ma non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

A

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \log x$ è

A) $\dfrac{(x^2\cos x - x\sin x - 2)\log x + x^2 + x\sin x + 1}{x^3}$ B) $\dfrac{(2x + \sin x + x\cos x + 1)x^2 \log x + 2x^2 + 2x\sin x + 2}{2x^3}$
C) $\dfrac{x^2 + \cos x}{2x^3}$ D) $\dfrac{x^3 + x\cos x - 2x^2 - 2x\sin x - 2}{x^4}$

A

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x^4 - x^3 - 2x}{e^{2x} + 3 + |x| + x^2}$

A) è limitata B) non è limitata né superiormente né inferiormente
C) è limitata inferiormente ma non superiormente D) è limitata superiormente ma non inferiormente

C

Domanda 4 L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x^3}\, dx$

A) converge B) non esiste
C) diverge negativamente D) diverge positivamente

D

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+3)\log(1+\frac{1}{2x})}{x} =$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) 0

B

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^3\sqrt{1+t^6}\, dt$

A) ha massimo ma non ha minimo B) ha sia massimo che minimo
C) è limitata superiormente ma non ha massimo
D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 7 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-1}\right) =$

A) 3 B) 0
C) $-\infty$ D) $\dfrac{3}{2}$

D

Domanda 8 La successione $a_n = \dfrac{n^4}{5-2n}$

A) ha massimo B) ha minimo
C) è limitata inferiormente ma non ha minimo D) è limitata superiormente ma non ha massimo

A

Domanda 9 Il limite della successione $a_n = n(1+(-1)^n) + n^2$

A) vale $+\infty$ B) vale $-\infty$ C) vale 0 D) non esiste

A

Domanda 10 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin(\sin(t^2))\, dt =$

A) 0 B) non esiste
C) $+\infty$ D) $\dfrac{1}{3}$

D

codice III anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 27 giugno 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - \dfrac{1}{x} & \text{se } -2 < x < 0 \\ \sqrt{x(x+2)} & \text{se } x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 0 \end{cases}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti orizzontali, verticali ed obliqui, punti di massimo o di minimo locale, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo).

Soluzione

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ dato che le quantità sotto radice sono non negative nei rispettivi domini. Vediamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x(x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \sqrt{x(x+2)} = 0 = f(-2)$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \sqrt{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \sqrt{x+2} - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x(x+2)} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+2)} = +\infty.$$

La funzione quindi è continua a sinistra ma non a destra in $x = -2$ mentre è continua a destra ma non a sinistra in $x = 0$. Inoltre f non è superiormente limitata e non presenta asintoti orizzontali. Potrebbe avere quelli obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+2)} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+2)-x^2}{\sqrt{x(x+2)}+x} = 1$$

La funzione ha quindi l'asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x(x+2)} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} = -1$$

quindi è presente l'asintoto obliquo di equazione $y = -x - 1$ per $x \to -\infty$. Vediamo ora la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x^2} & \text{se } -2 < x < 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x(x+2)}} & \text{se } x < -2 \text{ oppure } x > 0 \end{cases}$$

Nel punto $x = -2$ la funzione non è derivabile a destra perché non è continua a destra. Potrebbe essere derivabile solo a sinistra ma dal calcolo appena fatto risulta $f'_-(-2) = -\infty$, quindi non è derivabile neanche a sinistra ed il grafico ha semi-tangente sinistra verticale. Per analogo motivo la funzione non è derivabile né a destra né a sinistra in $x = 0$ ma $f'_+(0) = +\infty$ e il grafico ha semi-tangente destra verticale. Studiando il segno si ottiene che

$$f'(x) > 0 \qquad \text{se } -2 < x < 0 \text{ oppure } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \qquad \text{se } x < -2.$$

La funzione è quindi decrescente sulla semiretta $(-\infty, -2]$, crescente nell'intervallo $(-2, 0)$ e ancora crescente sulla semiretta $[0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{1}{2} > 0 = f(-2)$$

il punto $x = -2$ è di minimo locale. Analogamente, poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \text{ e } f(0) = 0$$

anche il punto $x = 0$ è di minimo locale. Essendo poi $f(-2) = f(0) = 0$ si ottiene anche che il minimo assoluto della funzione è 0. La funzione non ha massimo e il suo estremo superiore vale $+\infty$.

Esercizio 2 Studiare la convergenza, e la convergenza assoluta, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \alpha \sin x}{x^3}\, dx.$$

Soluzione

Studiamo prima la convergenza all'infinito. Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è positiva per x abbastanza grande, quindi convergenza semplice e assoluta sono equivalenti. Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Risulta che

$$\frac{x - \alpha \sin(x)}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$$

quindi l'integrale converge (e converge assolutamente) in un intorno di $+\infty$ per ogni valore di α.

Per $x \to 0^+$ il segno della funzione integranda dipende dal valore di α. Dallo sviluppo di Taylor della funzione seno otteniamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

quindi

$$x - \alpha \sin x = (1 - \alpha)x + \alpha \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim (1 - \alpha)x \qquad \text{se } \alpha \neq 1.$$

Da quest'ultima relazione, con l'uso del teorema sulla permanenza del segno, otteniamo anche che la funzione integranda, in un intorno destro di 0, è positiva se $\alpha < 1$ mentre è negativa se $\alpha > 1$. Nel caso $\alpha < 1$ si ha che

$$\frac{x - \alpha \sin x}{x^3} \sim (1 - \alpha)\frac{1}{x^2}$$

e l'integrale in un intorno di 0 diverge positivamente. Quindi, complessivamente, l'integrale diverge positivamente.

Nel caso $\alpha > 1$ si ha invece che l'integrale in un intorno di 0 diverge negativamente. Quindi, complessivamente, l'integrale diverge negativamente. Nel caso $\alpha = 1$ si ha che

$$\left| \frac{x - \alpha \sin x}{x^3} \right| = \left| \frac{x - \sin x}{x^3} \right| = \left| \frac{1}{6} + o(x) \right|$$

quindi l'integrale converge sia semplicemente che assolutamente in un intorno di 0. Raccogliendo i risultati si ha che l'integrale converge semplicemente e assolutamente solo per $\alpha = 1$. Diverge positivamente per $\alpha < 1$ e diverge negativamente per $\alpha > 1$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, della serie

$$\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) n^{2-\alpha^2}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, pertanto può solo convergere o divergere positivamente. Utilizzeremo il criterio del confronto asintotico. Se $\alpha > 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} = 0$ e, dallo sviluppo di Taylor dell'arcotangente centrato in 0, otteniamo

$$\arctan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

quindi

$$\arctan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) n^{2-\alpha^2} \sim \frac{n^{2-\alpha^2}}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha^2+2\alpha-2}}.$$

La serie pertanto converge se

$$\alpha^2 + 2\alpha - 2 > 1 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 3 > 0 \iff \alpha \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

che intersecato con la condizione $\alpha > 0$, fornisce l'intervallo di convergenza $\alpha \in (1, +\infty)$.

Se invece $\alpha < 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} = +\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$\arctan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) n^{2-\alpha^2} \sim n^{2-\alpha^2} = \frac{1}{n^{\alpha^2-2}}$$

che converge se

$$\alpha^2 - 2 > 1 \iff \alpha^2 - 3 > 0 \iff \alpha \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

Quindi, intersecando con la condizione $\alpha < 0$, otteniamo la convergenza per $\alpha \in (-\infty, -\sqrt{3})$. Per $\alpha = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{4} n^2$$

che diverge positivamente.

La serie converge quindi per $\alpha \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (1, +\infty)$ e diverge positivamente per tutti gli altri valori di α.