Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 6 giugno 2013

Domanda 1 La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log(\arctan x)$ | A
A) è limitata superiormente ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) è limitata inferiormente ma non ha minimo D) non è limitata né superiormente né inferiormente

Domanda 2 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n-(\log n)^2}$ | D
A) converge semplicemente ma non assolutamente B) converge assolutamente
C) diverge negativamente D) diverge positivamente

Domanda 3 Sia A l'insieme di definizione della funzione $f(x)=\log(\log(x+3))$. L'insieme A | A
A) è limitato inferiormente ma non superiormente B) non è limitato né superiormente né inferiormente
C) è limitato D) è limitato superiormente ma non inferiormente

Domanda 4 Nel punto $x=0$ la funzione definita da $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{1/x}} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$ | C
A) è continua a sinistra ma non a destra B) è continua
C) è continua a destra ma non a sinistra D) non è continua né a destra né a sinistra

Domanda 5 L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\tan x+\cos x}\,dx$ | B
A) diverge positivamente B) converge C) non esiste D) diverge negativamente

Domanda 6 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\log(13+\sin n)}{n}$ | B
A) converge assolutamente B) diverge positivamente
C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge negativamente

Domanda 7 La successione $a_n=\dfrac{n^3}{2^n}$ definita per $n\geq 0$ | C
A) non è limitata inferiormente B) è debolmente decrescente
C) ha sia massimo che minimo D) non ha limite

Domanda 8 $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\log(x^3)}{x}\,dx=$ | C
A) $\dfrac{3e^2}{2}(e^2-1)$ B) $-\dfrac{3}{e^2}$ C) $\dfrac{9}{2}$ D) $\dfrac{2}{e^2}$

Domanda 9 La successione $a_n=\dfrac{7n+2}{5n-6}$, definita per $n\geq 0$ | D
A) è debolmente decrescente B) è inferiormente ma non superiormente limitata
C) è superiormente ma non inferiormente limitata D) è limitata

Domanda 10 La funzione $F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$ | B
A) ha un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ B) è limitata inferiormente
C) è limitata superiormente D) ha un asintoto verticale per $x\to 0^+$

codice 637794

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 6 giugno 2013

Domanda 1 Nel punto $x = 0$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) è continua a sinistra ma non a destra B) non è continua né a destra né a sinistra
C) è continua D) è continua a destra ma non a sinistra

D

Domanda 2 La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin(x^2)}-1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ (x-\alpha)^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua nel punto $x = 0$

A) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$ B) solo per $\alpha = -1$ C) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ D) per $\alpha = 1$ e per $\alpha = -1$

B

Domanda 3 Sia A l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log(\log(x+3))$. L'insieme A
A) non è limitato né superiormente né inferiormente B) è limitato inferiormente ma non superiormente
C) è limitato D) è limitato superiormente ma non inferiormente

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ definita per $n \geq 0$
A) non è limitata inferiormente B) ha sia massimo che minimo
C) non ha limite D) è debolmente decrescente

B

Domanda 5 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(\arctan x)$
A) è limitata superiormente ma non ha massimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo
C) non è limitata né superiormente né inferiormente D) ha massimo ma non ha minimo

A

Domanda 6 L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan x + \cos x}\, dx$

A) diverge positivamente B) non esiste C) diverge negativamente D) converge

D

Domanda 7 La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\, dt$

A) è limitata inferiormente B) ha un asintoto verticale per $x \to 0^+$
C) ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ D) è limitata superiormente

A

Domanda 8 La successione $a_n = \dfrac{n^3 - n - 3}{n^2 + 9}$
A) è limitata B) ha massimo C) è limitata inferiormente ma non ha minimo D) ha minimo

D

Domanda 9 La successione $a_n = \dfrac{7n+2}{5n-6}$, definita per $n \geq 0$
A) è inferiormente ma non superiormente limitata B) è limitata
C) è debolmente decrescente D) è superiormente ma non inferiormente limitata

B

Domanda 10 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(x^3)}{x}\, dx =$

A) $\dfrac{2}{e^2}$ B) $\dfrac{3e^2}{2}(e^2-1)$ C) $-\dfrac{3}{e^2}$ D) $\dfrac{9}{2}$

D

codice III anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 6 giugno 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{xe^x}{x-2}$$

determinandone l'insieme di definizione, gli asintoti (compresi quelli obliqui), gli estremi superiore e inferiore e i punti di massimo e minimo locali e assoluti.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 2$ e in tutto il suo insieme di definizione è continua e derivabile. Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-2} \lim_{x\to-\infty} e^x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2} \lim_{x\to+\infty} e^x = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$ e un asintoto verticale di equazione $x = 2$. Potrebbe avere un asintoto obliquo per $x \to +\infty$: verifichiamolo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-2} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 1 \cdot (+\infty)$$

dove il limite di $\frac{e^x}{x}$ è stato ottenuto con il teorema di De L'Hôpital. La funzione non ha quindi asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x-2) - xe^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 2)}{(x-2)^2}.$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello di $x^2 - 2x - 2$. Ne segue che

$$f'(x) > 0 \text{ se } x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$$

$$f'(1-\sqrt{3}) = f'(1+\sqrt{3}) = 0.$$

Da questa analisi segue che il punto $x = 1-\sqrt{3}$ è di massimo locale mentre $x = 1+\sqrt{3}$ è di minimo locale. Dallo studio dei limiti la funzione non ha né massimo né minimo. L'estremo inferiore è $-\infty$ e quello superiore è $+\infty$.

Esercizio 2 Studiare la funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{2\log t}}{t^5 + t}\, dt$$

determinandone gli asintoti, gli estremi superiore e inferiore e i punti di massimo e minimo locali e assoluti.

Soluzione

Osserviamo subito che per ogni $t > 0$ risulta

$$\frac{e^{2\log t}}{t^5 + t} = \frac{t^2}{t^5 + t} = \frac{t}{t^4 + 1}$$

quindi la funzione integranda è continua in $(0, +\infty)$ e limitata in un intorno di 0. Ne segue che

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^0 \frac{t}{t^4 + 1}\, dt$$

e l'integrale ha valore finito. Quindi la F non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^4 + 1}\, dt$$

e questo integrale generalizzato risulta convergente per il criterio del confronto asintotico essendo

$$\frac{t}{t^4 + 1} \sim \frac{1}{t^3}.$$

Ne segue che la F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue subito che

$$F'(x) = \frac{x}{x^4 + 1} > 0 \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

quindi la F è strettamente crescente in tutto il suo dominio. Da quanto appena osservato si ha inoltre che

$$\inf(F) = \int_1^0 \frac{t}{t^4 + 1}\, dt = -\int_0^1 \frac{t}{t^4 + 1}\, dt < 0$$

$$\sup(F) = \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^4 + 1}\, dt.$$

Esercizio 3 (Solo per il I anno) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 3$ la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 3} \right)^n$$

converge o converge assolutamente.

Soluzione

Studiamo prima la convergenza assoluta con il criterio della radice.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 3} \right)^n \right|} = \left| \frac{\alpha}{\alpha - 3} \right| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left| \frac{\alpha}{\alpha - 3} \right|.$$

Condizione sufficiente per la convergenza assoluta è che sia

$$\left| \frac{\alpha}{\alpha - 3} \right| < 1.$$

Questa disuguaglianza è verificata se e solo se $|\alpha| < |\alpha - 3|$ e dallo studio del grafico dei due valori assoluti risulta immediato che la soluzione è $\alpha < \frac{3}{2}$. Per $\alpha > \frac{3}{2}$ risulta

$$\left| \frac{\alpha}{\alpha - 3} \right| > 1$$

quindi viene a mancare la condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 3} \right)^n = 0.$$

Resta da considerare il caso limite $\alpha = \frac{3}{2}$. Per tale valore di α la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(-1)^n$$

che converge per il criterio di Leibniz ma non converge assolutamente perché

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{1}{n}(-1)^n\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

che è divergente. In conclusione la serie converge per $\alpha \leq \frac{3}{2}$ e converge assolutamente per $\alpha < \frac{3}{2}$.

Esercizio 4 (Solo per il III anno) Calcolare il limite della successione

$$a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}.$$

Soluzione

Raccogliendo n^3 sotto le due radici risulta che

$$a_n = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3} - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/3}.$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \qquad x \to 0$$

con $x = \frac{1}{n}$ e $\alpha = \frac{1}{3}$, si ottiene che

$$a_n = n\left[1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = n\left(\frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$