Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 16 febbraio 2013

Domanda 1 La funzione $f:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{e^x}{\log x}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) è limitata ma non ha né massimo né minimo D) non è limitata né superiormente né inferiormente

A

Domanda 2 La successione $a_n=\dfrac{n+\sin(n^2)}{2n^2+n+3}$

A) tende a 0 B) non ha limite C) tende a $\dfrac{1}{2}$ D) è debolmente crescente

A

Domanda 3 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$

A) diverge positivamente B) diverge negativamente C) è indeterminata D) converge

D

Domanda 4 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$

A) non esiste B) converge C) diverge negativamente D) diverge positivamente

D

Domanda 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{x^2}\sin(t^3)\,dt=$$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) non esiste C) $+\infty$ D) 0

D

Domanda 6

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx=$$

A) e^2-e B) $2e^2$ C) $\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{e}{2}$ D) $6e^4$

B

Domanda 7

$$\lim_{x\to 0}x\left(\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$$

A) non esiste B) $+\infty$ C) 0 D) 1

C

Domanda 8 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{4^n+n^2}{\sqrt{n}-7^n}$

A) è indeterminata B) converge semplicemente ma non assolutamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

C

Domanda 9 La successione $a_n=n(1+(-1)^n)$

A) tende a $+\infty$ B) non ha limite ma è limitata
C) non è limitata né inferiormente né superiormente D) non ha limite ma è limitata inferiormente

D

Domanda 10 La funzione $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita fa $f(x)=\dfrac{6x+2}{7x+7}$

A) è iniettiva ma non surgettiva B) è surgettiva ma non iniettiva
C) non è né iniettiva né surgettiva D) è bigettiva

A

codice 260790

Analisi Matematica I

Pisa, 16 febbraio 2013

Domanda 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \sin(t^3)\, dt =$$

C

A) $+\infty$ B) non esiste C) 0 D) $\frac{1}{3}$

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{2n^2 + n + 3}$

D

A) non ha limite B) è debolmente crescente C) tende a $\frac{1}{2}$ D) tende a 0

Domanda 3 La funzione $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^x}{\log x}$

D

A) ha massimo ma non ha minimo B) non è limitata né superiormente né inferiormente
C) è limitata ma non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

Domanda 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^5 - (n+1)^5}{n^4} =$$

D

A) 0 B) $+\infty$ C) $\frac{5}{4}$ D) 5

Domanda 5 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

B

A) diverge negativamente B) diverge positivamente C) converge D) non esiste

Domanda 6 La funzione $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

C

A) è limitata superiormente ma non inferiormente B) non è limitata né superiormente né inferiormente
C) è limitata D) è limitata inferiormente ma non superiormente

Domanda 7

$$\lim_{x\to 0} x \left(\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) =$$

C

A) 1 B) $+\infty$ C) 0 D) non esiste

Domanda 8 La successione $a_n = n(1 + (-1)^n)$

B

A) non ha limite ma è limitata B) non ha limite ma è limitata inferiormente
C) non è limitata né inferiormente né superiormente D) tende a $+\infty$

Domanda 9 La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa $f(x) = \dfrac{6x+2}{7x+7}$

C

A) è surgettiva ma non iniettiva B) non è né iniettiva né surgettiva
C) è iniettiva ma non surgettiva D) è bigettiva

Domanda 10

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx =$$

A

A) $2e^2$ B) $\frac{e^2}{4} - \frac{e}{2}$ C) $6e^4$ D) $e^2 - e$

codice III anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 16 febbraio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo) e punti di massimo e minimo locali.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 1$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty e^{0^-} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1e^{\frac{1}{0^-}} = 1e^{-\infty} = 1 \cdot 0^+ = 0^+$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1e^{\frac{1}{0^+}} = 1e^{+\infty} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty e^{0^+} = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

Si osserva che la funzione ha un asintoto verticale (solo destro) di equazione $x = 1$. Potrebbero esserci asintoti obliqui. Valutiamo quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x-1}} - x = \lim_{x\to-\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x-1}}) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} + o\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 + 0 = 1$$

dove si è usato lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ con il cambiamento di variabile $t = \dfrac{1}{x-1}$.
La funzione ha quindi l'asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$ per $x \to -\infty$. Con calcoli identici si ottiene che anche per $x \to +\infty$ la funzione ha l'asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$.
Sempre dai limiti si ottiene che

$$\sup(f) = +\infty, \qquad \inf(f) = -\infty$$

quindi f non ha né massimo né minimo.
Vediamo ora la monotonia calcolando la derivata.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} + x\, e^{\frac{1}{x-1}} \frac{-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}.$$

Il segno di f' è determinato unicamente da quello del trinomio $x^2 - 3x + 1$.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Avremo quindi che

$$f'(x) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

La funzione è quindi crescente in $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, decrescente in $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, decrescente in $\left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ e crescente in $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. Da questo segue che il punto di ascissa $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è di massimo locale mentre quello di ascissa $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è di minimo locale.
Osserviamo infine che se prolunghiamo la funzione nel punto $x = 1$ ponendo $f(1) = 0$, otteniamo una funzione continua a sinistra in $x = 1$ e tale punto risulta di minimo locale.

Esercizio 2 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione

$$g(x) = \log x + 1 - x$$

si annulla per $x = 1$ e non si annulla in nessun altro punto dell'intervallo di integrazione. Infatti risulta

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0 \qquad \forall x > 1$$

pertanto la g è strettamente decrescente sulla semiretta $[1, +\infty)$. Essendo $g(1) = 0$, ne segue che $g(x) < 0$ per ogni $x > 1$. La funzione integranda è quindi di segno costante (negativo) e possiamo applicare i criteri di confronto.
Per $x \to 1^+$ risulta, dallo sviluppo di Taylor di $\log(1 + t)$ per $t \to 0^+$

$$\log x + 1 - x = \log\left(1 + (x - 1)\right) + 1 - x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2) + 1 - x = -\frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2) \sim -\frac{(x - 1)^2}{2}$$

ne segue che

$$\frac{1}{\log x + 1 - x} \sim \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

e quest'ultima funzione ha integrale divergente negativamente in un intorno destro di $x = 1$. L'analisi dell'andamento per $x \to +\infty$ risulta inutile dato che la funzione è negativa, quindi in ogni caso

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx = \int_1^{2} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx = -\infty + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x + 1 - x}\, dx = -\infty.$$

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, risulta convergente la serie

$$\sum_n \frac{1}{3^n \left(\log(1 + \alpha^2)\right)^n}.$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{1}{3^n \left(\log(1 + \alpha^2)\right)^n} = \left(\frac{1}{3\log(1 + \alpha^2)}\right)^n$$

quindi stiamo considerando una serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{3\log(1 + \alpha^2)}$, che convergerà se e solo se

$$\left|\frac{1}{3\log(1 + \alpha^2)}\right| < 1.$$

Osserviamo anche che $1 + \alpha^2 \geq 1$ quindi $\log(1 + \alpha^2) \geq 0$. Ne segue che dalla disuguaglianza precedente possiamo togliere il valore assoluto e dobbiamo escludere il caso $\alpha = 0$ per il quale la serie non ha senso. Allora avremo

$$\frac{1}{3\log(1 + \alpha^2)} < 1$$

cioè

$$\log(1+\alpha^2) > \frac{1}{3} \iff 1+\alpha^2 > \sqrt[3]{e} \iff \alpha^2 > \sqrt[3]{e}-1 \iff \alpha \in \left(-\infty, -\sqrt{\sqrt[3]{e}-1}\right) \cup \left(\sqrt{\sqrt[3]{e}-1}, +\infty\right).$$

Per tali valori di α la serie converge (e converge assolutamente, essendo a termini positivi). Per tutti gli altri valori di α la serie diverge positivamente.

Esercizio 4 Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{n! - 3^n}{n}.$$

Soluzione

$$\frac{n! - 3^n}{n} = \frac{n!}{n}\left(1 - \frac{3^n}{n!}\right) = (n-1)!\left(1 - \frac{3^n}{n!}\right).$$

Calcoliamo a parte il limite della successione

$$b_n = \frac{3^n}{n!}$$

utilizzando il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

e, utilizzando questo risultato abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n-1)!\left(1 - \frac{3^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} (n-1)!(1-0) = +\infty.$$